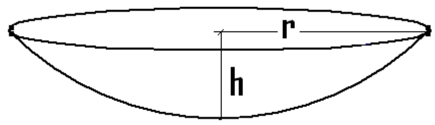
Devoir Maison n°5
Mathématiques

3°4
pour le vendredi 16 novembre 2007

► correction : exercice 1 – exercice 2 – exercice 3

Exercice 1 :

Le volume d'une calotte sphérique comme celle-ci se calcule en fonction (par exemple) du rayon r de la calotte et de sa propre hauteur h : $V=\frac{\pi}{6}(h^3+3\ h\,r^2)$



On découpe une pomme supposée parfaitement sphérique de diamètre 10 cm en cinq morceaux de même épaisseur. Quel est le volume exact de chaque morceau ? On donnera aussi une valeur approchée au dixième de centimètre cube près.

Exercice 2 :

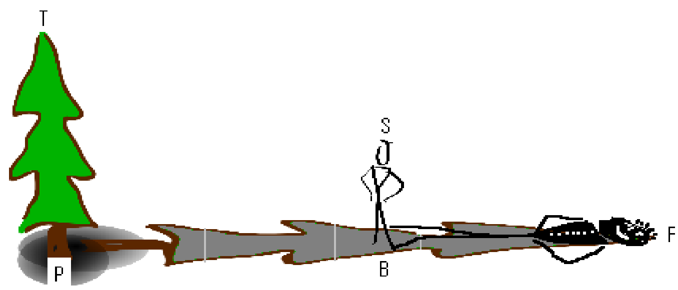
Soit E l'expression suivante :

$$E=(2x-4)^2-3(2x-4)(x-1)$$

1-Développer, réduire et ordonner E.
2-Factoriser E sous la forme d'un produit de deux facteurs du premier degré.
3-Calculer E lorsque x vaut $\frac{-2}{3}$.
4-Calculer E lorsque x vaut (-1).
5-Il existe un autre nombre pour lequel E prend la même valeur qu'à la question précédente. Déterminer cette valeur.
6-Pour quelle(s) valeur(s) de x l'expression E vaut-elle 4 ?

Exercice 3 :

Un bucheron de 1,85 m doit se tenir à 3,75 m d'un sapin pour voir son ombre de 2,34 m se terminer au même endroit que celle du sapin.

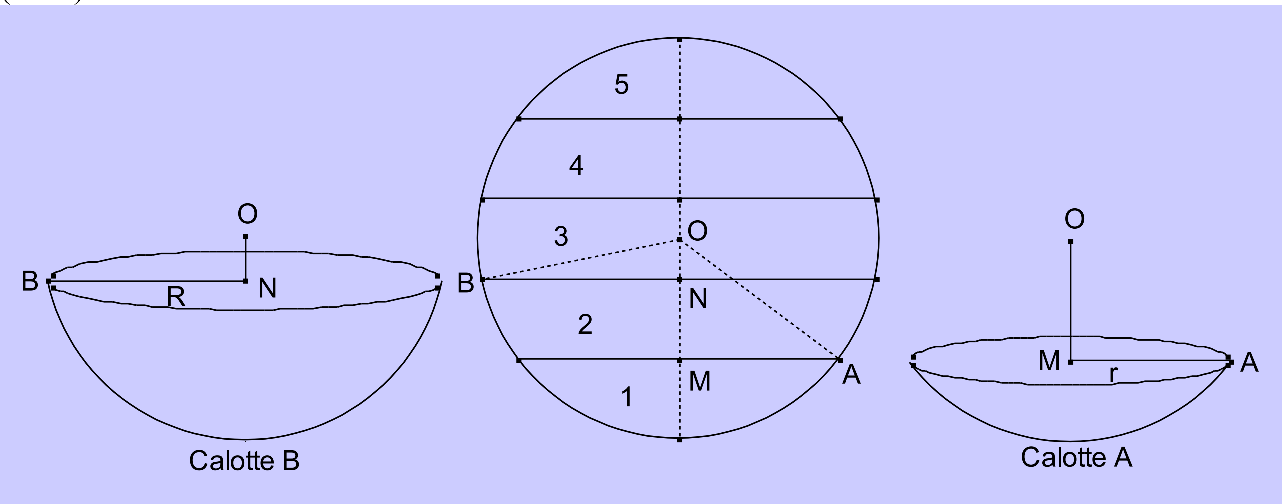


Faire quelques suppositions de bon sens afin de pouvoir déterminer la hauteur du sapin par une démarche dûment justifiée.

Correction :

Exercice 1 :

Voici une vue en coupe de la pomme, elle-même coupée en cinq morceaux de même épaisseur (2 cm) :



Calculons d'abord le volume de la calotte A. Pour cela, il faut le mesure du rayon « r », c'est-à-dire la longueur du segment [MA]. On applique donc la propriété de Pythagore dans le triangle OMA rectangle en M : $OA^2 = OM^2 + MA^2$, soit : $5^2 = 3^2 + MA^2$, ce qui donne après calculs MA = 4.

On calcule alors le volume ce cette calotte à l'aide de la formule donnée :

$$V = \frac{\pi}{6}(h^3 + 3\ h r^2)$$

$$V = \frac{\pi}{6}(2^3 + 3 \times 2 \times 4^2)$$

$$V = \frac{\pi}{6}(8 + 6 \times 16)$$

$$V = \frac{\pi}{6} \times 104$$

$V = \dfrac{52\ \pi}{3}$ valeur exacte, soit un volume d'environ 54,5 cm^3.

Calculons maintenant le volume de la calotte B, en procédant de la même manière que pour la première calotte. On applique la propriété de Pythagore dans le triangle ONB rectangle en N : $OB^2 = ON^2 + NB^2$, soit : $5^2 = 1^2 + NB^2$, soit après calcul : $NB^2 = 24$ (on ne calcule pas la racine carrée, qui « ne tombe pas juste », et qui de toute façon ne servira pas).

On calcule alors le volume ce cette calotte à l'aide de la formule donnée :

$V = \dfrac{\pi}{6}(h^3 + 3\ h r^2)$ on utilise ici r^2 soit NB^2 donc 24 ! ce qui donne :

$$V = \frac{\pi}{6}(4^3 + 3 \times 4 \times 24)$$

$$V = \frac{\pi}{6}(64 + 12 \times 24)$$

$$V = \frac{\pi}{6} \times 352$$

$V = \dfrac{176\ \pi}{3}$ valeur exacte.

Il reste maintenant à soustraire de ce volume celui de la première calotte pour trouver le volume du deuxième morceau de pomme (le n°2) :

$$V = \frac{176\ \pi}{3} - \frac{52\ \pi}{3}$$

$V = \frac{124\ \pi}{3}$ valeur exacte, ce qui fait un deuxième morceau de pomme d'environ 129,9 cm^3.

Déterminons maintenant le volume du morceau de pomme médian (le n°3). Pour cela, il nous faut avoir le volume total de la pomme, auquel nous soustrairons les volumes des quatre autres morceaux.

$$V_{total} = \frac{4}{3} \times \pi R^3$$

$$V_{total} = \frac{4}{3} \times \pi 5^3$$

$$V_{total} = \frac{4\ \times \pi \times 125}{3}$$

$$V_{total} = \frac{500\pi}{3}$$

Il ne reste plus qu'à soustraire :

$$V_{n°3} = \frac{500\pi}{3} - 2\ \times \frac{176\pi}{3}$$

$$V_{n°3} = \frac{500\pi}{3} - \frac{352\pi}{3}$$

$V_{n°3} = \frac{148\pi}{3}$ volume exact, soit un morceau de pomme d'environ 155 cm^3.

Récapitulatif :

N° du morceau	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
Volume exact (cm^3)	$\frac{52\ \pi}{3}$	$\frac{124\ \pi}{3}$	$\frac{148\pi}{3}$	$\frac{124\ \pi}{3}$	$\frac{52\ \pi}{3}$
Volume approché (cm^3)	54,5	129,9	155	129,9	54,5

Retour en haut

Exercice 2 :

$$E = (2x-4)^2 - 3(2x-4)(x-1)$$

1-Développement : une identité remarquable et une double distribution.

$$E = (2\ x)^2 - 2\ \times 2\ x \times 4 + 4^2\ - 3\ \times [2\ x \times x - 2\ x \times 1\ - 4\ \times x + 4\ \times 1\ ]$$

$$E = 4\ x^2 - 16\ x + 16\ - 3\ \times [2\ x^2\ \underbrace{-2\ x - 4\ x}_{-6\ x} + 4\ ]$$

$$E = 4\ x^2 - 16\ x + 16\ - 3\ \times 2\ x^2\ + 3\ \times 6\ x - 3\ \times 4$$

$$E = 4\ x^2 - 16\ x + 16\ - 6\ x^2\ + 18\ x - 12$$

$$E = -2\ x^2\ + 2\ x + 4$$

2-Factorisation : on trouve ici un facteur commun : $(2\ x - 4)$

$$E = (2\ x - 4)[(2\ x - 4) - 3(x - 1)]$$

$$E = (2\ x - 4)[2\ x - 4 - 3\ x + 3\ ]$$

$$E = (2\ x - 4)(-x - 1\ )$$

NB : développer cette formule permet de retrouver le résultat de la question 1 ; ceci permet de se rassurer (à faire sur un brouillon).

3-Calcul de E lorsque x vaut $\frac{-2}{3}$: il faut choisir une des trois formules disponibles. Je choisis celle sous la forme factorisée (pourquoi pas... ?!!) :

$$E=\left(2\times\frac{-2}{3}-4\right)\times\left(-\frac{-2}{3}-1\right)$$

$$E=\left(\frac{-4}{3}-\frac{4\times 3}{1\times 3}\right)\times\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{3}\right)$$

$$E=\frac{-16}{3}\times\frac{-1}{3}$$

$$E=\frac{16}{9}$$

4-Calcul de *E* lorsque *x* vaut -1 : je reprends la même formule :

$$E=(2\times(-1)-4)(-(-1)-1)$$

$$E=-6\times 0=0$$

E est donc nulle quand *x* vaut -1.

5-Pour déterminer s'il y a un autre nombre tel que *E* est nulle, il faut résoudre l'équation $E=0$.
Là, il faut choisir l'expression factorisée (puisqu'on n'est qu'au collège) : $(2x-4)(-x-1)=0$.
Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

soit : $2x-4=0$ donc $x=2$

soit : $-x-1=0$ donc $x=-1$.

Il existe donc bien un autre nombre pour lequel *E* est nulle : ce nombre est 2.

6-Résolution de l'équation $E=4$: on choisit ici l'expression développée :

$-2x^2+2x+4=4$ puisqu'elle contient la valeur « 4 ». Ainsi, 4 se simplifie :

$-2x^2+2x=0$ il faut donc factoriser :

$x(-2x+2)=0$. Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

soit : $x=0$

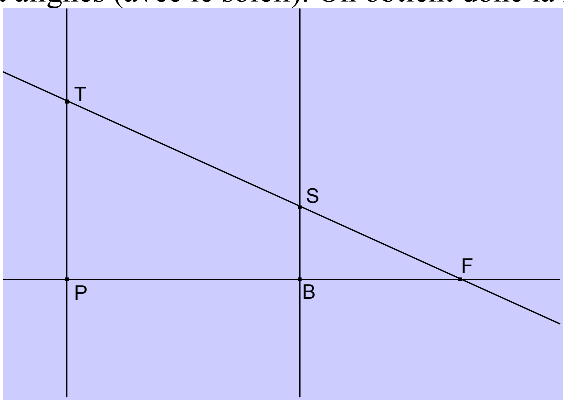
soit : $-2x+2=0$ donc $x=1$.

E vaut donc 4 lorsque *x* vaut 0 ou 1.

Retour en haut

Exercice 3 :

On peut supposer dans cet exercice que le bucheron et le sapin sont verticaux ; ainsi on pourra dire qu'on dispose de droites parallèles. Par ailleurs, l'ombre provient du soleil ; on peut donc dire que les trois points T, S et F sont alignés (avec le soleil). On obtient donc la modélisation suivante :



Dans le triangle TPF, on a :

$$\left.\begin{array}{l}-S\ sur\,[TF]\\-B\ sur\,[PF]\end{array}\right\}\text{tels que }(BS)//(TP)$$ On applique la propriété de Thalès :

$\frac{FS}{FT}=\frac{FB}{FP}=\frac{BS}{TP}$ ce qui donne sans le premier rapport : $\frac{2{,}34}{6{,}09}=\frac{1{,}85}{TP}$

d'où $2{,}34\times TP=6{,}09\times 1{,}85$ et donc $TP=\frac{11{,}2665}{2{,}34}\approx 4{,}81$.

Le sapin mesure donc environ 4,81 m de haut.

Retour en haut