DM de mathématiques n° 2
3°4

Pour le mercredi 10 octobre 2007

Exercice 1 :

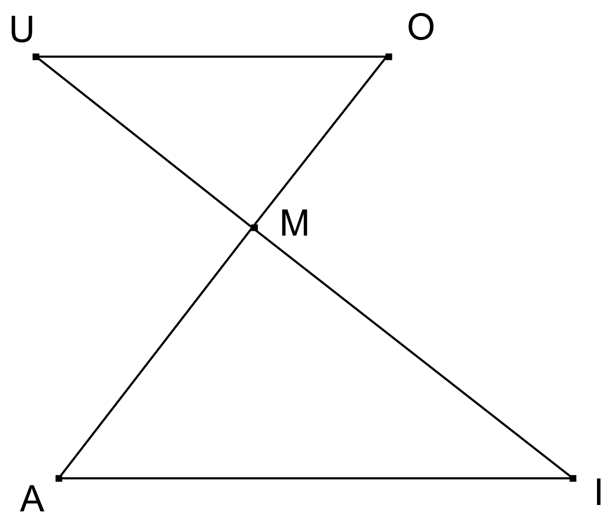
Soit A=1820 et B=2730. La fraction $\frac{A}{B}$ est-elle irréductible ? Justifier très simplement.

Calculer le PGCD de A et B. Simplifier la fraction $\frac{A}{B}$.

Exercice 2 :

Soit l'expression numérique A suivante :
$A = (2x+1)^2 + (x-5)(2x+1)$
1-Développer, réduire et ordonner A. Utiliser les identités remarquables si possible.
2-Calculer A lorsque x vaut (-2).
3-Calculer A lorsque x vaut $\frac{3}{5}$. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 3 :



Sur la figure ci-contre, les segments [OA] et [UI] se coupent en M. On a : UM=28, AM=27, MI=36, OM=21 et AI=45. L'unité de longueur est le millimètre.

1-Prouver que les droites (UO) et (AI) sont parallèles.
2-Calculer la longueur UO.
3-Quelle est la nature du triangle AMI ? Justifier.
4-Calculer l'aire du triangle AMI.
5-Le triangle MOU est une réduction du triangle AMI. Quelle est la valeur exacte du coefficient de réduction ? En déduire simplement l'aire du triangle MOU.

Exercice 4 : Avis de recherche

On recherche deux nombres entiers naturels dont la somme vaut 1680 et dont le PGCD vaut 210.
Quels sont ces deux nombres (il y a deux possibilités) ?

Correction du DM2 – 3°4 – 10 octobre 2007

Exercice 1 :

La fraction $\frac{1820}{2730}$ n'est pas irréductible car (par exemple) les deux nombres se finissent par zéro et par conséquent la fraction est au moins simplifiable par dix.
Pour calculer le pgcd de 1820 et de 2730, on utilise l'algorithme d'Euclide :

$$2730 = 1 \times 1820 + 910$$
$$1820 = 2 \times 910 + 0$$

et donc le pgcd est 910.

$$\text{Donc : } \frac{1820}{2730} = \frac{2 \times 910}{3 \times 910} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2 :

1-Développement :
$A = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 + x \times 2x + x \times 1 - 5 \times 2x - 5 \times 1$
$A = 4x^2 + 4x + 1 + 2x^2 + x - 10x - 5$
$A = 6x^2 - 5x - 4$

2-Calcul de A lorsque x vaut (-2) :
$A = 6 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) - 4$
$A = 24 + 10 - 4$
$A = 30$

3-Calcul de A lorsque x vaut $\frac{3}{5}$:

$A = 6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 5 \times \frac{3}{5} - 4$

$A = 6 \times \frac{9}{25} - 3 - 4$

$A = \frac{54}{25} - \frac{7 \times 25}{25}$

$A = \frac{-121}{25}$

Exercice 3 :

1-Prouver le parallélisme :
Les points U, M et I d'une part et O, M et A d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Comparons ces deux rapports :

$$\frac{UM}{IM} = \frac{28}{36} = \frac{4 \times 7}{4 \times 9} = \frac{7}{9}$$
$$\frac{OM}{AM} = \frac{21}{27} = \frac{3 \times 7}{3 \times 9} = \frac{7}{9}$$

Les rapports sont égaux, donc d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (UO) et (AI) sont parallèles.
2-Calcul de la longueur UO :
Comme on a les droites (UI) et (OA) sécantes en M avec (UO) parallèle à (AI), on peut appliquer la propriété de Thalès :

$$\frac{UM}{IM} = \frac{OM}{AM} = \frac{UO}{AI} = \frac{7}{9}$$

($\frac{7}{9}$ provient de la question précédente).
Donc avec les deux derniers rapports, on obtient : $9 \times UO = 7 \times 45$ et donc $UO = 35$
(en gros, [UO] mesure les $\frac{7}{9}$ de [AI]).
3-Nature du triangle AMI :
Vu que ses longueurs sont toutes différentes, il ne peut être que rectangle, sinon rien !

On a :

$$AI^2 = 45^2 = 2025$$
$$AM^2 + MI^2 = 27^2 + 36^2 = 729 + 1296 = 2025$$

On a donc l'égalité $AI^2 = AM^2 + MI^2$. D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle AMI est rectangle en M.
4-Aire du triangle AMI :
$A = \frac{b \times h}{2}$ où nous prendrons [AM] comme base et [MI] comme hauteur, puisque ces deux côtés sont perpendiculaires.
Donc $A = \frac{27 \times 36}{2} = \frac{972}{2} = 486$ l'unité étant le mm^2.

5-Comme vu à la question 3, le triangle MOU est une réduction du triangle AMI à l'échelle $\frac{7}{9}$.

L'aire du petit triangle est donc égale à celle du grand multipliée par le carré de $\frac{7}{9}$:

$A = 486 \times \left(\frac{7}{9}\right)^2 = 486 \times \left(\frac{49}{81}\right) = \frac{23\,814}{81} = 294$ en mm^2, bien sûr.

Exercice 4 :

210 étant le pgcd des deux nombres recherchés, chacun de ces nombres est donc un multiple de 210. Appelons donc A et B ces deux nombres. A vaut un certain nombre de fois 210 : appelons « a » ce nombre de fois. Procédons de même pour B. On obtient :
$A = a \times 210$ et $B = b \times 210$. N'oublions pas que leur somme vaut 1680 :
$A + B = 1680$ donc $a \times 210 + b \times 210 = 1680$ soit $(a+b) \times 210 = 1680$. Il en résulte que $a + b = 1680 \div 210$, soit $a + b = 8$. Il n'y a donc pas 50 solutions : juste sept, que voici :

Possibilité	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7
a	1	2	3	4	5	6	7
b	7	6	5	4	3	2	1
A	210	420	630	840	1050	1260	1470
B	1470	1260	1050	840	630	420	210

Le choix n°4 peut de suite s'éliminer, puisque les deux nombres étant égaux à 840, leur pgcd est 840.
On peut ensuite éliminer les choix n°2 et n°6, soit en regardant les valeurs de « a » et « b » et en constatant qu'ils ne sont eux-mêmes pas premiers entre eux, soit en calculant le pgcd de 420 et de 1260, soit encore plus simplement en remarquant que 1260 est le triple de 420, ce qui veut dire que leur pgcd est 420. Il ne reste donc plus que deux couples de possibilités :

1- les nombres recherchés sont 210 et 1470
2- les nombres recherchés sont 630 et 1050