Devoir Maison de Mathématiques n°7

pour le lundi sept janvier deux mille huit

Exercice 1 :

Anne et Patrick collectionnent les tickets de Loto® perdants. Si elle en donnait cinq à Patrick, Anne en aurait alors deux fois plus que lui ; mais si elle en donnait vingt c'est Patrick qui en aurait le double d'Anne. Combien de fois ont-ils perdu au Loto® ?

NB : Procéder par étapes, comme indiqué en leçon.

Exercice 2 :

Soit M l'expression suivante :

$$M=(2y+4)^2-(2y+4)(y-4)$$

1-Développer, réduire et ordonner M.
2-Factoriser l'expression M.
3-Résoudre l'équation $M = 0$.
4-Résoudre l'équation $M = 32$.
5-Calculer la valeur de M lorsque y vaut $5\sqrt{3}$. Donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$, où a et b sont deux nombres entiers.

Problème :

Partie 1:

Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité le centimètre, placer les quatre points suivants :
A(-1 ; -3), B(5 ; -7), C(11 ; 2) et D(5 ; 6).

1-Calculer les coordonnées du milieu G du segment [AC].
2-Calculer les coordonnées du milieu K du segment [BD].
3-Quelle conclusion intermédiaire peut-on tirer des deux premières questions ?
4-Calculer les valeurs exactes des longueurs AC et BD.
5-Calculer les valeurs exactes des longueurs AB et BC.
6-En déduire la nature précise du quadrilatère ABCD.
7-Soit F le point tel que AGDF soit un parallélogramme. Calculer ses coordonnées.
8-Quelle est, en fait, la véritable nature du quadrilatère AGDF ? Justifier.

Partie 2 :

On recherche les points de l'axe des ordonnées qui pourraient être le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse [AB]. On appellera M un tel point, dont les coordonnées sont (0 ; y) puisque M est cencé être un point de l'axe des ordonnées.
En reprenant les questions de la partie 2 du DM6, déterminer tous les points de l'axe des ordonnées qui satisfont à la condition.

NB : on pourra largement s'inspirer de la correction du DM6, et aussi s'aider en traçant une figure dynamique avec Geogebra.

Joyeuses Fêtes de fin d'année ! À l'année prochaine...

Correction :

Exercice 1 :

Commençons par donner des noms à nos deux inconnues : A le nombre de billets que possède Anne et P le nombre de billets de Patrick. Si on détermine A et P, on saura répondre à la question posée. Il faut maintenant écrire des équations qu'il faudra résoudre. Pour cela, procédons de façon organisée en remplissant ce tableau :

Nombre de billets	Anne	Patrick
Au début	A	P
Si Anne en donne cinq	A-5	P+5
Si Anne en donne vingt	A-20	P+20

Il reste alors à écrire les deux équations du système, en relisant et traduisant les phrases du problème :

Si elle en donnait cinq à Patrick, Anne en aurait alors deux fois plus que lui :

$$A-5=2\times(P+5)$$

Mais si elle en donnait vingt c'est Patrick qui en aurait le double d'Anne :

$$P+20=2\times(A-20)$$

Voici donc le système à résoudre :

$$\begin{cases} A-5=2\times(P+5) \\ P+20=2\times(A-20) \end{cases}$$

Commençons par développer ces deux expressions :

$$\begin{cases} A-5=2P+10 \\ P+20=2A-40 \end{cases}$$

Ensuite, on remet les inconnues dans le membre de gauche, comme à l'accoutumée :

$$\begin{cases} A-2P=10+5 \\ -2A+P=-40-20 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} A-2P=15 \\ -2A+P=-60 \end{cases}$$

Ou encore, en changeant les signes de la deuxième équation (c'est-à-dire en la multipliant par -1) :

$$\begin{cases} A-2P=15 \\ 2A-P=60 \end{cases}$$

Il reste alors à résoudre, par exemple en utilisant la méthode dite par combinaison. Doublons la première équation. On obtient :

$$\begin{cases} 2A-4P=30 \\ 2A-P=60 \end{cases}$$

Effectuons la différence entre ces deux équations (éq.2 – éq.1) :

$$(2A-P)-(2A-4P)=60-30$$
$$2A-P-2A+4P=30$$
$$3P=30$$
$$\text{donc}\quad P=10$$

Il reste à trouver A. Le plus rapide consiste ici à utiliser l'équation $A-2P=15$ où on remplace P par sa valeur : $A-2\times10=15$ soit $A-20=15$ donc $A=35$.

On vérifie en remplissant à nouveau le tableau :

Nombre de billets	Anne	Patrick	Bilan
Au début	35	10	
Si Anne en donne cinq	35-5=30	10+5=15	Anne en aurait bien le double de Patrick
Si Anne en donne vingt	35-20=15	10+20=30	Patrick en aurait bien le double d'Anne

On voit que c'est conforme à l'énoncé. Ils ont donc perdu ensemble 45 fois au Loto®.

Exercice 2 :

Soit M l'expression suivante :

$$M=(2y+4)^2-(2y+4)(y-4)$$

1-Développer, réduire et ordonner M.

$$M=(2y)^2+2\times 2y\times 4+4^2-(2y\times y-2y\times 4+4\times y-4\times 4)$$

$$M=4y^2+16y+16-2y^2+8y-4y+16$$

$$M=2y^2+20y+32$$

2-Factoriser l'expression M.

$$M=(2y+4)[(2y+4)-(y-4)]$$

$$M=(2y+4)(y+8)$$

3-Résoudre l'équation $M = 0$.

On utilise l'expression factorisée de M :

$(2y+4)(y+8)=0$ si l'un ou l'autre des facteurs est nul :

*soit $2y+4=0$, c'est-à-dire $y=-2$

*soit $y+8=0$ c'est-à-dire $y=-8$

L'équation $M = 0$ admet donc deux solutions : - 2 et - 8.

4-Résoudre l'équation $M = 32$.

On utilise ici l'expression développée de M puisqu'elle contient la valeur 32 (c'est un indice !!) :

$$2y^2+20y+32=32$$

$$2y^2+20y=32-32$$

$$2y^2+20y=0$$

Factorisons cette expression :

$2y\times(y+10)=0$ Ce produit est nul si l'un ou l'autre des facteurs est nul :

*soit $2y=0$, c'est-à-dire $y=0$

*soit $y+10=0$ c'est-à-dire $y=-10$

L'équation $M = 32$ admet donc deux solutions : 0 et - 10.

5-Calculer la valeur de M lorsque y vaut $5\sqrt{3}$. Donner le résultat sous la forme $a+b\sqrt{3}$, où a et b sont deux nombres entiers.

Il faut choisir une des expressions de M ; par exemple l'expression développée :

$$M=2y^2+20y+32$$

$$M=2\times(5\sqrt{3})^2+20\times(5\sqrt{3})+32$$

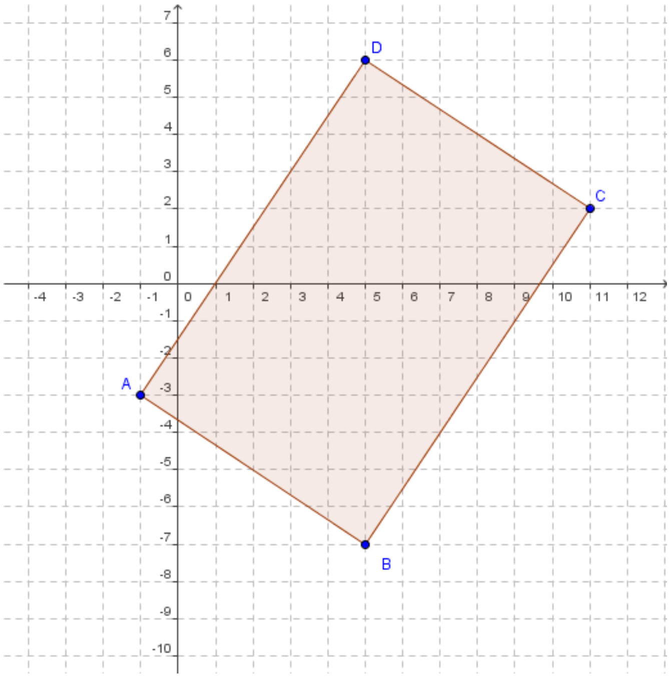
$$M=150+100\sqrt{3}+32$$

$$M=182+100\sqrt{3}$$

Problème :

Partie 1 :

Dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité le centimètre, placer les quatre points suivants :
A(-1 ; -3), B(5 ; -7), C(11 ; 2) et D(5 ; 6).



1-Calculer les coordonnées du milieu G du segment [AC].

$$x_G = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_G = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_G = \frac{-1+11}{2} \qquad y_G = \frac{-3+2}{2}$$

$$x_G = 5 \qquad y_G = \frac{-1}{2}$$

donc G a pour coordonnées $\left(5\,;-\frac{1}{2}\right)$

2-Calculer les coordonnées du milieu K du segment [BD].

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} \qquad y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$x_K = \frac{5+5}{2} \qquad y_K = \frac{-7+6}{2}$$

$$x_K = 5 \qquad y_K = \frac{-1}{2}$$

donc K a pour coordonnées $\left(5\,;-\frac{1}{2}\right)$

3-Quelle conclusion intermédiaire peut-on tirer des deux premières questions ?
G et K ont les mêmes coordonnées ; ils sont donc superposés. Les deux diagonales [AC]et [BD] du quadrilatère ABCD ont donc le même milieu (K ou G) ; c'est donc déjà un parallélogramme. Est-il

plus qu'un parallélogramme ?

4-Calculer les valeurs exactes des longueurs AC et BD.

$$AC^2=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2 \qquad BD^2=(x_D-x_B)^2+(y_D-y_B)^2$$
$$AC^2=(11-(-1))^2+(2-(-3))^2 \qquad BD^2=(5-5)^2+(6-(-7))^2$$
$$AC^2=12^2+5^2 \qquad BD^2=0+13^2$$
$$AC^2=144+25 \qquad BD^2=169$$
$$AC^2=169 \qquad BD=\sqrt{169}$$
$$AC=\sqrt{169} \qquad BD=13$$
$$AC=13$$

Les diagonales [AC] et [BD] ont la même longueur. Le parallélogramme ABCD est donc aussi un rectangle. Est-il plus qu'un rectangle ?

5-Calculer les valeurs exactes des longueurs AB et BC.

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 \qquad BC^2=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2$$
$$AB^2=(5-(-1))^2+(-7-(-3))^2 \qquad BC^2=(11-5)^2+(2-(-7))^2$$
$$AB^2=6^2+(-4)^2 \qquad BC^2=6^2+9^2$$
$$AB^2=36+16 \qquad BC^2=36+81$$
$$AB^2=52 \qquad BC^2=117$$
$$AB=\sqrt{52} \qquad BC=\sqrt{117}$$
$$AB=\sqrt{4\times 13}$$
$$AB=2\sqrt{13}$$

6-En déduire la nature précise du quadrilatère ABCD.
Les deux côtés consécutifs [AB] et [BC] du rectangle n'étant pas de la même longueur, ce n'est pas un carré. ABCD est donc un rectangle.

7-Soit F le point tel que AGDF soit un parallélogramme. Calculer ses coordonnées.
AGDF devant être un parallélogramme, ses diagonales [AD] et [GF] doivent avoir le même milieu.
Appelons N ce milieu et calculons ses coordonnées :

$$x_N=\frac{x_A+x_D}{2} \qquad y_N=\frac{y_A+y_D}{2}$$
$$x_N=\frac{-1+5}{2} \qquad y_N=\frac{-3+6}{2}$$
$$x_N=2 \qquad y_N=\frac{3}{2}$$

donc N a pour coordonnées $\left(2\,;\frac{3}{2}\right)$

Maintenant, on détermine les coordonnées de F en utilisant le fait que N est le milieu de [GF] :

$$x_N=\frac{x_G+x_F}{2} \qquad y_N=\frac{y_G+y_F}{2}$$
$$2=\frac{5+x_F}{2} \qquad \frac{3}{2}=\frac{\frac{-1}{2}+y_F}{2}$$
$$2\times 2=5+x_F \qquad 3=\frac{-1}{2}+y_F$$
$$x_F=-1 \qquad y_F=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

Donc les coordonnées de F sont $\left(-1\,;\frac{7}{2}\right)$

8-Quelle est, en fait, la véritable nature du quadrilatère AGDF ? Justifier.
G étant le milieu des diagonales [AC] et [BD] du rectangle ABCD, les longueurs AG et GC sont égales (puisque les diagonales du rectangle ont la même longueur, les demi-diagonales aussi). Par conséquent, les deux côtés consécutifs [AG] et [GD] du parallélogramme AGDF ont la même longueur. C'est donc un losange.

Partie 2 :

On recherche les points de l'axe des ordonnées qui pourraient être le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle d'hypoténuse [AB]. On appellera M un tel point, dont les coordonnées sont (0 ; y) puisque M est cencé être un point de l'axe des ordonnées.
En reprenant les questions de la partie 2 du DM6, déterminer tous les points de l'axe des ordonnées qui satisfont à la condition.

J'invite tous ceux qui ne l'ont pas encore fait à cliquer sur ce lien pour visualiser la situation de ce problème, et comprendre que nous recherchons l'ordonnée du point M qui est tel que le triangle ABM est rectangle en M.

Longueur AB :
cette longueur est déjà calculée. Elle vaut $AB^2=52$ (seul le carré nous intéresse, car qui dit triangle rectangle dit Pythagore, donc carré de longueur).

Longueur AM :

$$AM^2=(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2$$
$$AM^2=(0-(-1))^2+(y_M-(-3))^2$$
$$AM^2=1+(y_M+3)^2$$

je développe avec la première identité remarquable :

$$AM^2=1+y_M^2+6\,y_M+9$$
$$AM^2=y_M^2+6\mathrm{y}_M+10$$

Longueur BM :

$$BM^2=(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2$$
$$BM^2=(0-5)^2+(y_M-(-7))^2$$
$$BM^2=25+(y_M+7)^2$$

je développe avec la première identité remarquable :

$$BM^2=25+y_M^2+14\,y_M+49$$
$$BM^2=y_M^2+14\mathrm{y}_M+74$$

Le triangle ABM doit être rectangle en M. On doit donc avoir $AM^2+BM^2=AB^2$ (c'est la propriété de Pythagore) ; ce qui se traduit par :

$$(y_M^2+6\mathrm{y}_M+10)+(y_M^2+14\mathrm{y}_M+74)=52$$

donc : $2\,y_M^2+20\mathrm{y}_M+84=52$

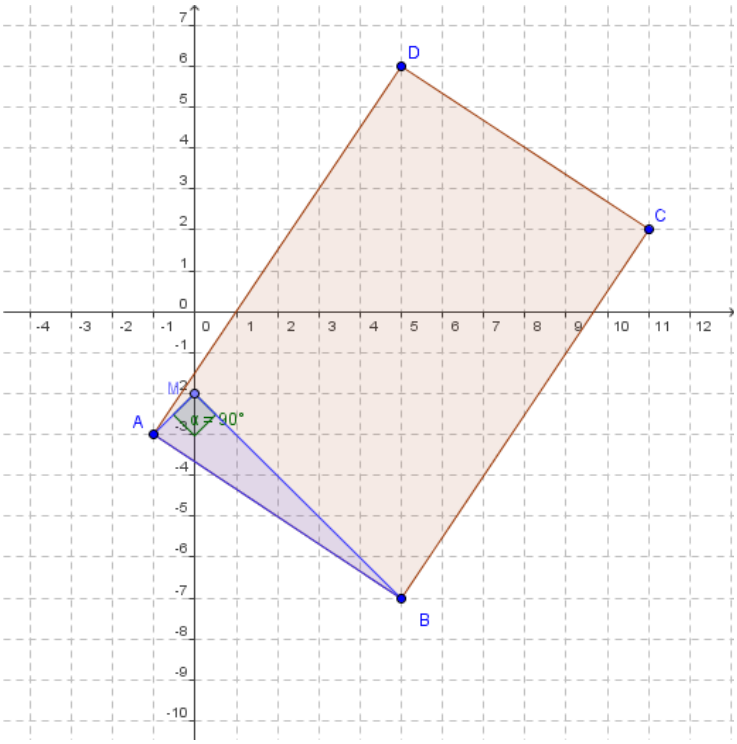
soit : $2\,y_M^2+20\mathrm{y}_M+84-52=0$

$$2\,y_M^2+20\mathrm{y}_M+32=0$$

On reconnaît évidemment dans le membre de gauche de cette équation l'expression développée de l'expression M de l'exercice 2. Cette équation est donc déjà résolue (M=0). Elle a deux solutions : soit $y_M = -2$ soit $y_M = -8$. Il y a donc deux points M qui répondent aux conditions :

$$M_1(0\,;-2) \quad \text{et} \quad M_2(0\,;-8)$$

cas 1 :



cas 2 :