DM6 de Mathématiques

Classe de 3°

Vers la correction : Exercice – Problème I – Problème II

NB : Il est fortement recommandé de résoudre l'exercice avant le problème.

Exercice :

Soit E l'expression suivante :

$$E=(x-5)^2-(x-5)(17-x)$$

1-Développer, réduire et ordonner E.
2-Factoriser l'expression E.
3-Résoudre l'équation $E = 0$.
4-Résoudre l'équation $E = 110$.
5-Calculer la valeur de E lorsque x vaut $\frac{-5}{3}$. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

Problème :

Première partie

Soit un repère orthonormé (O,I,J) d'unité le carreau de la feuille (feuille A4 à grands carreaux).
Dans ce repère, on donne trois points : A(4;7) B(12;1) et C(1;3).
1a)-Tracer le repère et y placer les points.
1b)-Calculer les longueurs AB et AC, en unité de repère, puis convertir en cm. Expliquer la conversion.
1c)-Sachant que $BC=\sqrt{125}$ unité de repère, quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
1d)-Déterminer une mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.

Deuxième partie

L'objectif de cette partie du problème est de chercher avec quels points de l'axe des abscisses on peut tracer un triangle rectangle d'hypoténuse [AB], A et B étant les deux points du repère de la première partie. Pour cela, on va appeler M un tel point. Ses coordonnées sont $(x\,;0)$. On écrira une équation dont l'inconnue est x qu'on va chercher à résoudre. La ou les solutions trouvées donneront la ou les positions possibles de M. Naturellement ce point M est sur l'axe des abscisses, conformément à l'objectif et comme l'indique son ordonnée.

2a)-Déterminer la valeur de AM^2 (le résultat sera une formule dans laquelle apparaît l'inconnue x et qu'on prendra soin de développer).
2b)-Même question avec BM^2.
2c)-En justifiant la démarche, élaborer une équation qui traduise le fait que le triangle ABM est rectangle en M.
2d)-En s'aidant de l'exercice, résoudre cette équation et déterminer les coordonnées des deux points M_1 et M_2 qui satisfont à l'objectif fixé.
2e)-Pour chaque point trouvé, recalculer les distances AM, BM et vérifier que le triangle ABM est bien rectangle en M. Placer ces points sur le repère de la première partie et tracer les deux triangles rectangles en couleur.

Correction :

Exercice :

$$E=(x-5)^2-(x-5)(17-x)$$

1-Développer, réduire et ordonner E.

$E=x^2-10x+25-(17x-x^2-85+5x)$ une identité remarquable et une double distrib.

$E=x^2-10x+25-17x+x^2+85-5x$ on supprime les (...). Attention au signe

$E=2x^2-32x+110$ on réduit

2-Factoriser l'expression E.

$E=(x-5)[(x-5)-(17-x)]$ $(x-5)$ est un facteur commun

$E=(x-5)(x-5-17+x)$ on supprime les (...). Attention au signe

$E=(x-5)(2x-22)$

3-Résoudre l'équation $E = 0$.

Il faut choisir l'expression factorisée de E pour résoudre cette équation :

$(x-5)(2x-22)=0$

Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

soit : $x-5=0$ donc $x=5$

soit : $2x-22=0$ donc $x=11$.

E vaut donc 0 lorsque x vaut 5 ou 11.

4-Résoudre l'équation $E = 110$.

Cette fois, on choisit l'expression développée de E :

$2x^2-32x+110=110$ les « 110 » se simplifient

$2x^2-32x=0$ il faut factoriser

$2x(x-16)=0$

Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

soit : $2x=0$ donc $x=0$

soit : $x-16=0$ donc $x=16$.

E vaut donc 110 lorsque x vaut 0 ou 16.

5-Calculer la valeur de E lorsque x vaut $\frac{-5}{3}$. Donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

On peut choisir n'importe quelle expression de E. Par exemple, avec l'expression factorisée, cela donne :

$E=(\frac{-5}{3}-5)(2\times\frac{-5}{3}-22)$

$E=\frac{-20}{3}\times\frac{-76}{3}$

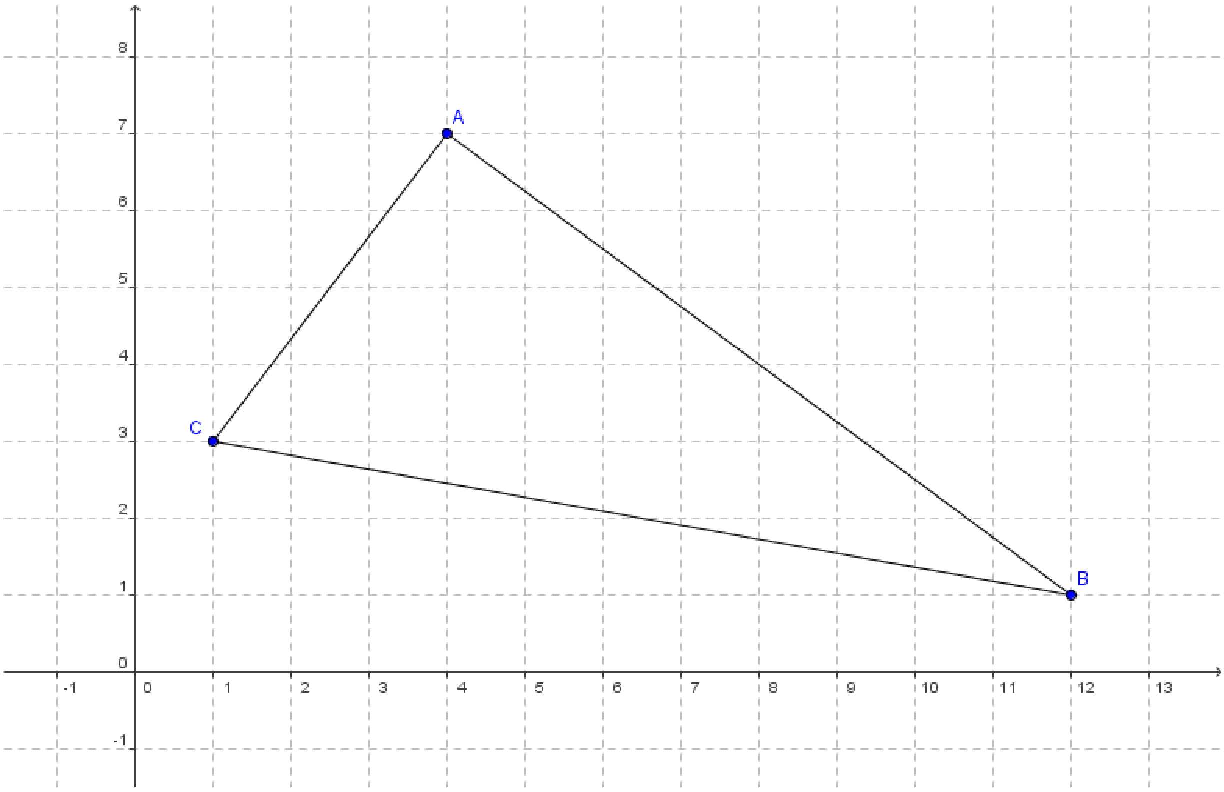
$E=\frac{1520}{9}$

Retour en haut

Problème :

PREMIERE PARTIE

1a)-Tracer le repère et y placer les points.



1b)-Calculer les longueurs AB et AC, en unité de repère, puis convertir en cm. Expliquer la conversion.

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 \qquad AC^2=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2$$
$$AB^2=(12-4)^2+(1-7)^2 \qquad AC^2=(1-4)^2+(3-7)^2$$
$$AB^2=8^2+(-6)^2 \qquad AC^2=(-3)^2+(-4)^2$$
$$AB^2=64+36 \qquad AC^2=9+16$$
$$AB^2=100 \qquad AC^2=25$$
$$AB=\sqrt{100} \qquad AC=\sqrt{25}$$
$$AB=10 \qquad AC=5$$

Or, dans une feuille A4 à grand carreaux, chaque carreau mesure 8 mm de côté :

1 unité de repère = 8 mm

donc $AB=10\times 8\ \text{mm}=8\ \text{cm}$; de même : $AC=4\ \text{cm}$

1c)-Sachant que $BC=\sqrt{125}$ unité de repère, quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

$BC=\sqrt{125}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{donc } BC^2=125\\ \text{or } AB^2+AC^2=100+25=125\end{array}\right\}\text{ce qui donne : } AB^2+AC^2=BC^2$$

D'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

1d)-Déterminer une mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.

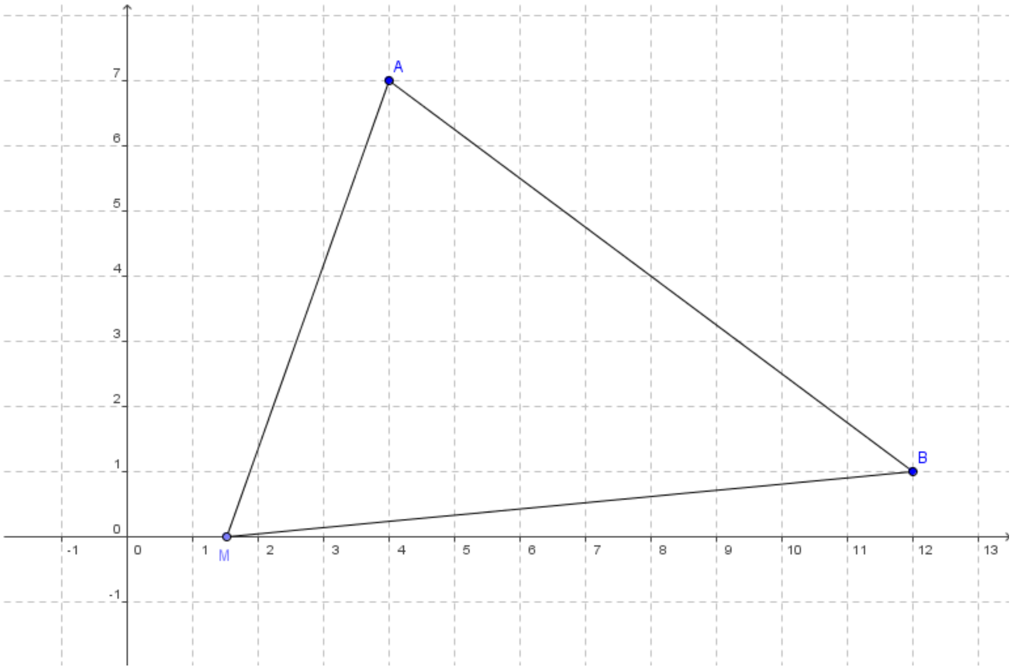
Dans le triangle ABC rectangle en A :

$$\cos(\widehat{ACB})=\frac{AC}{BC}=\frac{5}{\sqrt{125}}$$

donc $\widehat{ACB}$ mesure environ 63°.

Retour en haut

DEUXIEME PARTIE



2a)-<u>Valeur de AM² :</u>

$$AM^2=(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2$$
$$AM^2=(x-4)^2+(0-7)^2$$
$$AM^2=(x-4)^2+(-7)^2$$
$$AM^2=(x-4)^2+49$$
$$AM^2=x^2-8x+16+49$$
$$AM^2=x^2-8x+65$$

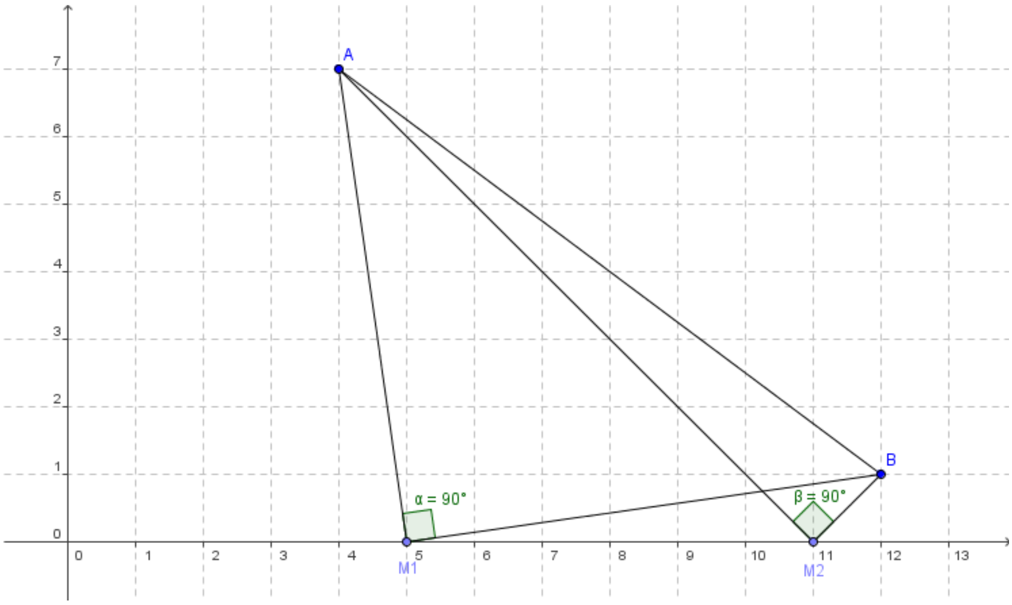
2b)-<u>Valeur de BM² :</u>

$$BM^2=(x_M-x_B)^2+(y_M-y_B)^2$$
$$BM^2=(x-12)^2+(0-1)^2$$
$$BM^2=(x-12)^2+(-1)^2$$
$$BM^2=(x-12)^2+1$$
$$BM^2=x^2-24x+144+1$$
$$BM^2=x^2-24x+145$$

2c)-<u>Pour que le triangle ABM soit rectangle en M</u>, il doit vérifier la réciproque de la propriété de Pythagore, selon laquelle la somme des carrés des deux petits côtés (AM² + BM²) doit être égale au carré du plus grand côté (AB²) :

$$[x^2-8x+65]+[x^2-24x+145]=100$$
$$2x^2-32x+\underbrace{210=100}_{simplification}$$
$$2x^2-32x+110=0$$

2d)-<u>Résolution</u> : cette équation a déjà été résolue dans l'exercice, puisque le membre de gauche de cette équation n'est autre que l'expression développée de *E*. L'équation à résoudre est donc équivalente à celle résolue à la question 3- de l'exercice. Elle a donc deux solutions, qui sont 5 et 11. Ce qui signifie qu'il y a deux points M qui peuvent être le sommet de l'angle droit du triangle ABM : M_1 et M_2. Ces deux points ont comme coordonnées $M_1(5\ ;\ 0)$ et $M_2(11\ ;\ 0)$.
On voit très nettement sur la figure suivante les deux points M trouvés :



2e)-<u>Vérifications</u> :

Pour le point M_1 :
$AM_1^2 = 50$
$BM_1^2 = 50$ Visiblement, ça « marche »
et $AB^2 = 100$

Pour le point M_2
$AM_2^2 = 98$
$BM_2^2 = 2$ Visiblement, ça « marche » aussi.
et $AB^2 = 100$

Retour en haut