DM de mathématiques n°3

pour vendredi 26 octobre 07

Exercice 1 :

Brevet 2000 Clermont-Ferrand

Soit l'expression algébrique : $E = (3x+1)(6x-9)-(2x-3)^2$

1-Développer, réduire et ordonner E.

2-Après avoir factorisé $(6x-9)$, factoriser E.

3-Calculer E lorsque x vaut $\frac{-2}{3}$. Donner le résultat sous sa forme la plus simple.

4-Résoudre l'équation E = 0.

Exercice 2 :

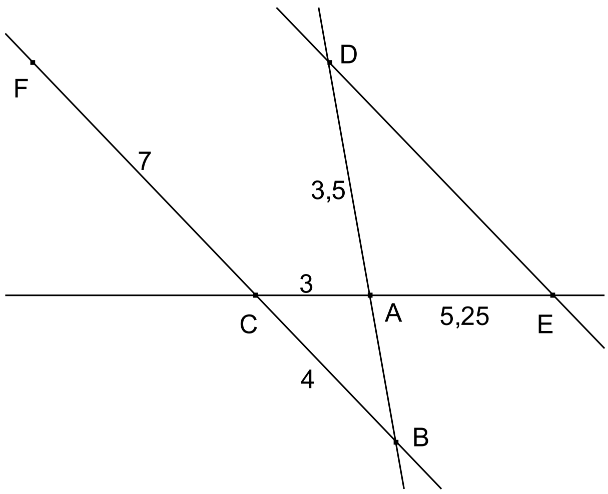
Soit E, F et G les trois fractions suivantes :

$E = \frac{387}{333}$ $F = \frac{1846}{2343}$ $G = \frac{5005}{1564}$

1-Une de ces trois fractions est irréductible. Laquelle ? Justifier.

2-Simplifier les deux autres pour les rendre irréductibles.

Exercice 3 :



Cette figure n'est pas tracée à la bonne échelle. On ne demande pas de la retracer.

Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Les droites (BD) et (CE) se coupent en A. Le point F est aligné avec les points B et C.

1-Démontrer que le segment [AB] mesure 2.

2-Démontrer que les droites (FD) et (CA) sont parallèles.

3-Prouver que les angles $\widehat{FBD}$ et $\widehat{EDA}$ ont la même mesure.

Correction du DM3

Exercice 1 :

$E=(3x+1)(6x-9)-(2x-3)^2$

1-développement :

$E=18x^2-27x+6x-9-(4x^2-12x+9)$ on développe chaque « paquet »

$E=18x^2-21x-9-4x^2+12x-9$ on supprime les petites parenthèses (!! signe !!)

$E=14x^2-9x-18$ on réduit.

2-factorisation :

$6x-9=3\times(2x-3)$ et donc :

$E=3(3x+1)(2x-3)-(2x-3)\times(2x-3)$ on repère un facteur commun $(2x-3)$

$E=(2x-3)(3(3x+1)-(2x-3))$ on développe la petite parenthèse $3(3x+1)$

$E=(2x-3)(9x+3-2x+3)$ et on supprime la deuxième petite (!! signe !!)

$E=(2x-3)(7x+6)$ on finit par réduire la 2° parenthèse

Remarque : si on redéveloppe cette expression, on doit retomber sur le résultat de la première question ! Mais ce n'est pas demandé ; ça peut juste servir de vérification rapide.

3-Pour remplacer x par $\frac{-2}{3}$, on a le choix de l'expression. Je vais choisir celle développée :

$$E=14\times\left(\frac{-2}{3}\right)^2-9\times\frac{-2}{3}-18$$

$$E=14\times\frac{4}{9}+6-18$$ deux tiers de neuf c'est six !

$$E=\frac{56}{9}-12$$

$$E=\frac{56}{9}-\frac{12\times9}{1\times9}$$ on réduit au même dénominateur

$$E=\frac{56-108}{9}$$

$$E=\frac{-52}{9}$$

4- $E=0$ lorsque $(2x-3)(7x+6)=0$. Ce produit est nul si l'un ou l'autre de ses facteurs est nul. Ce qui nous donne deux possibilités :

soit $2x-3=0$ ce qui veut dire $x=\frac{3}{2}$

soit $7x+6=0$ ce qui signifie $x=\frac{-6}{7}$

Les deux solutions de cette équation sont donc $\frac{3}{2}$ et $\frac{-6}{7}$.

Exercice 2 :

1-La fraction irréductible :

Il est aisé de constater que la première fraction n'est pas irréductible. En effet, tous ces « 3 » au dénominateur nous incitent à vérifier si le numérateur ne serait pas, par hasard, un multiple de 3 : 3 + 8 + 7 = 18 et 18 est un multiple de 3, donc 387 l'est aussi. La première fraction se simplifie donc au moins par 3 ; elle n'est donc pas irréductible.

Il ne reste donc qu'un seul véritable calcul de PGCD à effectuer pour déterminer laquelle des deux fractions restantes est irréductible. Je choisis donc la suivante :

PGCD avec l'algorithme d'Euclide :

2343 = 1 x 1846 + 497
1846 = 3 x 497 + 355
497 = 1 x 355 + 142
355 = 2 x 142 + 71
142 = 2 x 71 + 0
Le PGCD de 1846 et de 2343 vaut 71. La deuxième fraction n'est donc pas non plus irréductible.
C'est donc la troisième fraction qui est irréductible (du moins si on fait confiance à mon énoncé).
2-Simplification des deux premières fractions :

$$\frac{1846}{2343}=\frac{26\times71}{33\times71}=\frac{26}{33}$$

Pour la toute première, cherchons le PGCD de 387 et 333 avec l'algorithme d'Euclide :
387 = 1 x 333 + 54
333 = 6 x 54 + 9
54 = 6 x 9 + 0
Le PGCD vaut 9 donc : $\frac{387}{333}=\frac{9\times43}{9\times37}=\frac{43}{37}$

Exercice 3 :

1-Considérant le triangle ADE, on a :

- -C sur (AE)
- -B sur (AD)
- -et (DE) // (BC)

on peut donc appliquer la propriété de Thalès :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

on utilise les deux premiers rapports pour obtenir :
$\frac{3{,}5}{AB}=\frac{5{,}25}{3}$ ce qui donne à l'aide des produits en croix : $5{,}25\times AB=3\times3{,}5$ donc après calculs $AB=2$.
2-Les points B, C et F d'une part et B, A et D d'autre part sont alignés dans cet ordre.
Comparons ces deux rapports :

$$\frac{BC}{BF}=\frac{4}{4+7}=\frac{4}{11}$$

$$\frac{BA}{BD}=\frac{2}{2+3{,}5}=\frac{2}{5{,}5}=\frac{4}{11}$$

Les rapports sont égaux ; donc, d'après la réciproque de la propriété de Thalès, les droites (FD) et (CA) sont parallèles.
3-Les angles $\widehat{FBD}$ et $\widehat{EDA}$ sont des angles alternes-internes formés par les droites (DE) et (BC) parallèles et par la sécante (BD).
Or : Si deux angles alternes-internes sont déterminés par deux droites parallèles, alors ils ont la même mesure.
Donc les angles $\widehat{FBD}$ et $\widehat{EDA}$ ont la même mesure (qu'on ne connait pas, mais ce n'est pas demandé).