Devoir Maison de Mathématiques

3°4
Pour jeudi 8 novembre 2007

Exercice 1 :

Soit E l'expression suivante :

$$E=\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}\right)^2$$

1-Vous développerez, réduirez et ordonnerez E.
2-Vous factoriserez E.
3-Vous calculerez E lorsque $x=\frac{-2}{5}$.
4-Vous déterminerez la ou les valeurs de x pour que E vaille zéro.
5-Même question pour que E vaille -1.

Nota : il sera opportun de se poser la question suivante : pourquoi -1 ?

Exercice 2 :

Sur l'étalage d'un boucher, on peut trouver des saucissons de cheval. Leur forme peut être assimilée à un cylindre terminé à chaque extrémité par une demi-boule. Le saucisson a une longueur totale de 15 cm et une épaisseur de 5 cm.
1-Tracer une vue en perspective du saucisson de cheval.
2-Calculer le volume exact de viande que contient ce saucisson. Donner ensuite une valeur arrondie au dixième de cm^3 près.
3-La peau du saucisson est faite de boyau naturel. Calculer l'aire exacte de boyau utilisé pour ce saucisson. Donner ensuite un arrondi de cette aire au cm^2 près.
4-Pour promouvoir ce produit naturel, le boucher décide d'augmenter la taille de ses saucissons tout en en maintenant le prix d'origine. Le saucisson gagne donc 3 cm en longueur et 1 cm en grosseur. Quel est le coefficient d'agrandissement ? Quel sera le nouveau volume du saucisson ? Quelle sera l'aire de la peau ?
5-Quel(s) slogan(s) le boucher pourrait-t-il noter sur son affichette ?

Exercice 3 :

Prenons une feuille de papier rectangulaire. Découpons-y le carré le plus grand possible. Dans le morceau qui reste, on recommence : on y découpe le carré le plus grand possible ; on continue autant de fois que nécessaire jusqu'à ce que le morceau restant soit un carré.

Par exemple : avec une feuille de 21 cm par 29 cm, le premier carré fera 21 cm de côté. Il reste une bande de papier de 8 cm par 21 cm. On peut donc ensuite tailler deux carrés de 8 cm de côté. Il reste alors une bande de 5 cm par 8 cm. On découpe alors un carré de 5 cm de côté. Puis un carré de 3 cm, un carré de 2 cm, et enfin un carré de 1 cm. Alors, et pour la première fois, il reste un morceau de papier carré (de 1 cm de côté).

Question : en commençant avec une bande de papier rectangulaire de 2248 cm par 1580 cm, quelle sera la taille du carré qui reste à la fin ?

Nota : vous justifierez bien sûr la valeur que vous donnerez.

Bonnes vacances !!!

Correction du DM 4 :

Exercice 1 :

1-Développer.

On écrit d'abord la formule : $E=\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}\right)^2$. On développe ensuite les deux identités remarquables : $E=\left(\frac{x^2}{9}-2\times\frac{x}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{9}{16}\right)-\left(\frac{4}{25}x^2+2\times\frac{2}{5}x\times\frac{5}{4}+\frac{25}{16}\right)$. On réduit les parenthèses : $E=\left(\frac{x^2}{9}-\frac{x}{2}+\frac{9}{16}\right)-\left(\frac{4}{25}x^2+x+\frac{25}{16}\right)$. Il reste alors à supprimer les parenthèses : $E=\frac{x^2}{9}-\frac{x}{2}+\frac{9}{16}-\frac{4}{25}x^2-x-\frac{25}{16}$ et à réduire le tout :

$E=\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{25}\right)x^2+x\left(\frac{-1}{2}-1\right)+\frac{9}{16}-\frac{25}{16}$ ce qui fait : $E=\frac{-11}{225}x^2-\frac{3}{2}x-1$

2.Factoriser.

On repart du début, et on remarque que E est du type a^2-b^2 , formule dans laquelle $a=\frac{x}{3}-\frac{3}{4}$ et $b=\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}$. E se factorise donc sous la forme $(a-b)(a+b)$. Donc :

$E=\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}\right)\right]\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}\right)\right]$. Il ne reste plus qu'à réduire les parenthèses : $E=\left[\frac{x}{3}-\frac{3}{4}-\frac{2}{5}x-\frac{5}{4}\right]\left[\frac{x}{3}-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}x+\frac{5}{4}\right]$

$E=\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)x-\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right]\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)x-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right]$

$E=\left(\frac{-1}{15}x-2\right)\left(\frac{11}{15}x+\frac{1}{2}\right)$

NB : on peut développer cette expression pour s'assurer qu'on retrouve le résultat de la question 1.

3. $x=\frac{-2}{5}$:

$E=\frac{-11}{225}\times\left(\frac{-2}{5}\right)^2-\frac{3}{2}\times\frac{-2}{5}-1$

$E=\frac{-11}{225}\times\frac{4}{25}+\frac{3}{5}-\frac{5}{5}$

$E=\frac{-44}{5625}-\frac{2\times1125}{5\times1125}$

$E=\frac{-44}{5625}-\frac{2250}{5625}$

$E=\frac{-2294}{5625}$

4.Equation $E=0$. Il faut choisir la forme factorisée de E : $\left(\frac{-1}{15}x-2\right)\left(\frac{11}{15}x+\frac{1}{2}\right)=0$. Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

soit : $\frac{-1}{15}x-2=0$ donc $x=-30$

soit : $\frac{11}{15}x+\frac{1}{2}=0$ donc $x=\frac{-15}{22}$.

L'équation a donc 2 solutions : -30 et $\frac{-15}{22}$.

5.Equation $E=-1$. Il est clair que -1 est une valeur inhabituelle. On choisira donc ici la formule développée de E puisqu'elle contient la valeur -1. Voyons ce que cela donne :

$\frac{-11}{225}x^2-\frac{3}{2}x-1=-1$ Les « -1 » se simplifient :

$\frac{-11}{225}x^2-\frac{3}{2}x=0$ On factorise alors x :

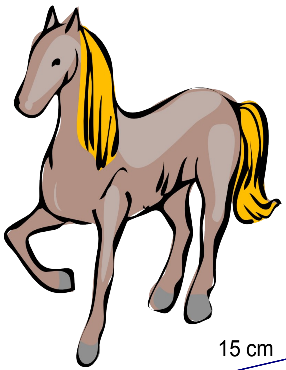
$x\left(\frac{-11}{225}x-\frac{3}{2}\right)=0$ Ceci est un produit, qui doit être nul. Ce produit est nul si l'un de ses facteurs l'est :

soit : $x=0$

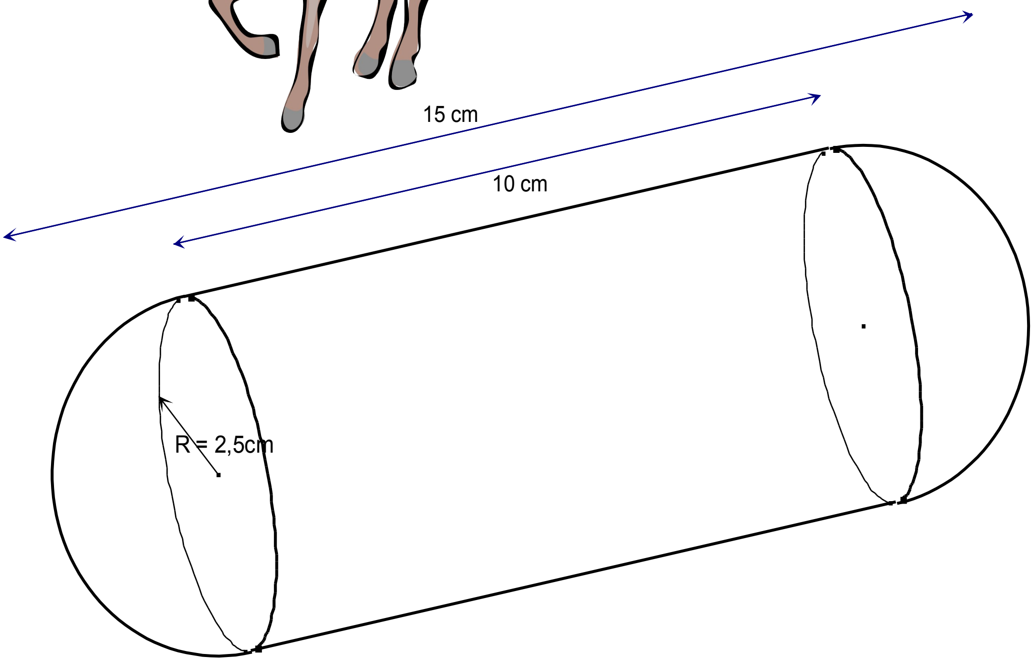
soit : $\frac{-11}{225}x-\frac{3}{2}=0$ ce qui donne $x=\frac{-675}{22}$

L'équation a donc 2 solutions : 0 et $\frac{-675}{22}$.

Exercice 2 :



1.Vue en perspective :



2.Volume de viande :

-dans le cylindre : $V=\pi\times R^2\times H=\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times 10=\pi\times\frac{25}{4}\times 10=\frac{125\ \pi}{2}\ cm^3$

--dans les deux demi-sphères : $V=\frac{4}{3}\times\pi\times R^3=\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{4\times 125\times\pi}{3\times 8}=\frac{125\ \pi}{6}\ cm^3$

---Total : $V=\frac{125\ \pi}{2}+\frac{125\ \pi}{6}=\frac{500\ \pi}{6}=\frac{250\ \pi}{3}\ cm^3$

soit un volume d'environ 262 cm^3 .

3.Aire du boyau :

-autour du cylindre : $A=2\ \pi R \times H = 2\ \pi \times \frac{5}{2} \times 10\ = 50\ \pi\, cm^2$

--autour des demi-sphères : $A=4\ \pi R^2 = 4\ \times \pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25\ \pi\, cm^2$

---total : $A=50\ \pi + 25\ \pi = 75\ \pi\, cm^2$

soit une aire d'environ 236 cm^2 .

4.Promotion :

La nouvelle longueur du saucisson est de 15 + 3 = 18 cm, contre 15 cm précédemment. Le diamètre du saucisson passe de 5 cm à 6 cm. En fait, ses dimensions ont été multipliées par $18 \div 15 = 1{,}2$. Le coefficient d'agrandissement est donc de 1,2.

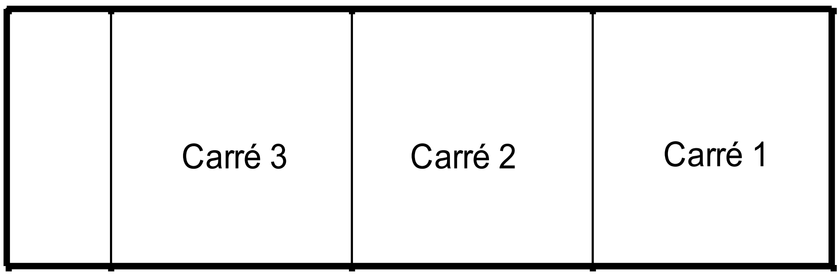
-nouveau volume : $V = v \times 1{,}2^3 = 262 \times 1{,}728 = 452{,}736\ cm^3$

--nouvelle aire : $A = a \times 1{,}2^2 = 236 \times 1{,}44 = 339{,}84\ cm^2$

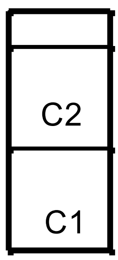
5.Un slogan : le volume est multiplié par 1,728 ; c'est une augmentation de 72,8 %. Le boucher peut donc afficher : +72,8 % de saucisson gratuit, ou 1,728 kg au prix de 1 kg.

Exercice 3 :

Cet exercice qui paraît pénible est en fait relativement simple. Réfléchissons à la mise en oeuvre demandée : on prend un rectangle, et on y découpe des carrés ; simple ! Regardons cette illustration :



Il est clair qu'on cherche à enlever le plus de carrés dans le rectangle. Si *L* est la longueur et *l* la largeur, on peut écrire ici $L = l \times 3 + reste$. L'étape suivante consiste à considérer le rectangle restant dans lequel la longueur est la largeur du précédent et la largeur est le reste de la longueur précédente :



On peut écrire ici : $l = reste \times 2 + autre\ reste$. Et ainsi de suite. En réalité, il s'agit de la procédure pour déterminer un PGCD (c'est l'algorithme d'Euclide). Les deux nombres de départs sont la longueur et la largeur du premier rectangle.

Détaillons de ce point de vue l'exemple donné dans l'énoncé avec la feuille de 21 cm par 29 cm :

Avec une feuille de 21 cm par 29 cm, le premier carré fera 21 cm de côté. Il reste une bande de papier de 8 cm par 21 cm.

$29 = 21 \times 1 + 8$

On peut donc ensuite tailler deux carrés de 8 cm de côté. Il reste alors une bande de 5 cm par 8 cm.

$21 = 8 \times 2 + 5$

On découpe alors un carré de 5 cm de côté.

$8 = 5 \times 1 + 3$

Puis un carré de 3 cm

$5 = 3 \times 1 + 2$

un carré de 2 cm

$3 = 2 \times 1 + 1$

et enfin un carré de 1 cm. Alors, et pour la première fois, il reste un morceau de papier carré (de 1 cm de côté) (ce qui fait donc 2 carrés de 1 cm de côté) :

$2 = 1 \times 2 + 0$

Le dernier carré a donc 1 cm de côté.

Appliquons donc cette méthode pour l'exercice demandé :
Calculons le PGCD de 2248 et de 1580 par l'algorithme d'Euclide :

$2248 = 1 \times 1580 + 668$
$1580 = 2 \times 668 + 244$
$668 = 2 \times 244 + 180$
$244 = 1 \times 180 + 64$
$180 = 2 \times 64 + 52$
$64 = 1 \times 52 + 12$
$52 = 4 \times 12 + 4$
$12 = 3 \times 4 + 0$

Le PGCD vaut 4. On peut donc dire que le dernier carré qu'on taillera dans cette feuille de papier aura 4 cm de côté.