BREVET DES COLLEGES

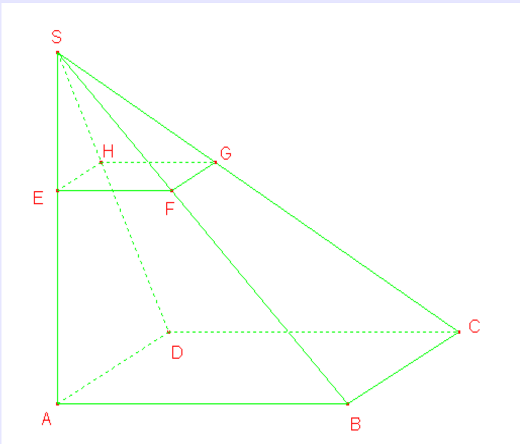
MATHEMATIQUES

SESSION 2006

III-Problème

Partie A
Partie B

Sur la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA] telle que AB = 9 cm et SA = 12 cm. Le triangle SAB est rectangle en A.



Partie A

EFGH est la section de la pyramide par le plan parallèle à la base telle que SE = 3 cm.
1)
a)Calculer EF.
b)Calculer SB.

2)
a)Calculer le volume de la pyramide SABCD.
b)Donner le coefficient de réduction permettant de passer de la pyramide SABCD à la pyramide

SEFGH.
c)En déduire le volume de SEFGH. On donnera une valeur arrondie à l'unité.

1-a)Dans le triangle SAB, on a le point E sur le côté [SA] et le point F sur [SB], avec (EF) et (AB) parallèles.
On peut donc appliquer la propriété de Thalès :
$$\frac{SE}{SA}=\frac{SF}{SB}=\frac{EF}{AB}$$
En remplaçant par les valeurs connues, on obtient : $\frac{3}{12}=\frac{EF}{9}$, d'où $EF=\frac{9}{4}=2,25$

1-b)Dans le triangle SAB, rectangle en A, on applique la propriété de Pythagore :
$$SB^2=SA^2+AB^2$$
$$SB^2=12^2+9^2$$
$$SB^2=144+91$$
$$SB^2=225$$
$$SB=\sqrt{225}=15$$

2-a)Volume de la pyramide : $V=\frac{aire\,de\,la\,base\times hauteur}{3}$
Ici la base est un carré de côté AB = 9 cmet la hauteur mesure 12 cm.
Donc : $V=\frac{(9\ cm\times 9\ cm)\times 12\ cm}{3}=324\ cm^3$

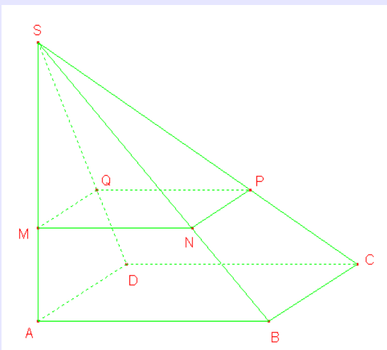
2-b)Le coefficient de réduction est le rapport entre les longueurs SE et SA : $k=\frac{SE}{SA}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

2-c) $V(SEFGH)=V(SABCD)\times k^3=324\ cm^3\times(\frac{1}{4})^3\approx 5\ cm^3$

↺

Partie B

Soit M un point de [SA] tel que SM = x cm, où x est compris entre 0 et 12.
On appelle MNPQ la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base passant par M.



1)Montrer que MN = $0,75\ x$.
2)Soit $A(x)$ l'aire du carré MNPQ en fonction de x . Montrer que $A(x)=0,5625\ x^2$.
3)Compléter le tableau de l'annexe 2.
4)Placer dans le repère du papier millimétré de l'annexe 2 les points d'abscisse x et d'ordonnée $A(x)$ données par le tableau.
5)L'aire de MNPQ est-elle proportionnelle à la longueur SM ? Justifier à l'aide du graphique.

1)La longueur MN se détermine comme la longueur EF de la partie A, en utilisant la propriété de Thalès. Voici les trois rapports égaux de cette situation :

$$\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{MN}{AB}$$

Or SM = x , SA = 12, et AB = 9, donc on obtient : $\frac{x}{12}=\frac{MN}{9}$

On effectue les produits en croix, dans lesquels on prend comme inconnue MN, x jouant ici le rôle d'une longueur donnée mais pas précisée : $12\times MN=9\times x$, d'où

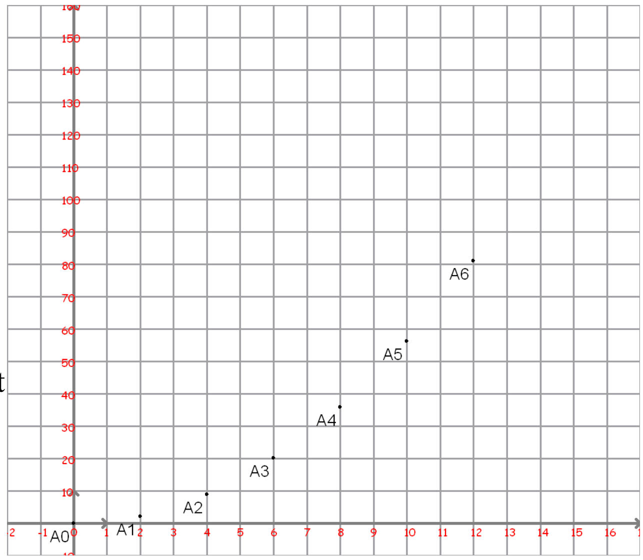
$$MN=\frac{9\times x}{12}=\frac{9}{12}\times x=0,75\ x$$

2)L'aire d'un carré de côté c étant $c\times c$, l'aire $A(x)$ du carré MNPQ de côté $0,75\ x$ est :
$A(x)=(0,75\ x)^2=0,5625\ x^2$

3)D'où le tableau ci-dessous :

x : longueur SM en cm	0	2	4	6	8	10	12
$A(x)$: aire du carré MNPQ	0	2,25	9	20,25	36	56,25	81

4)En plaçant les points définis par les coordonnées précédemment calculées, on obtient ce genre de figure :



5)Il est très clair que les points ne sont pas alignés. Il ne s'agit donc pas d'une situation de proportionnalité qui est ici représentée. On peut donc en conclure que l'aire du carré MNPQ n'est pas proportionnelle à la longueur SM.