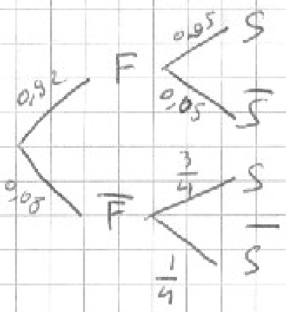
DS n° 5

Ex1 :

1) a) $P(F) = 0,92$; $P_F(S) = 0,95$; $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 0,02$ (1)

b) $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \dfrac{p(\overline{F} \cap \overline{S})}{p(\overline{F})} = \dfrac{0,02}{1-0,92} = \dfrac{1}{4}$ (1)

c)



(1)

2) a) F et $\overline{F}$ formant une partition : $p(S) = p_F(S)\,p(F) + p_{\overline{F}}(S)\,p(\overline{F})$

$= 0,95 \times 0,92 + \frac{3}{4} \times 0,08$

$= 0,934$ (1,5)

b) $p_F(S) \neq P(S)$ donc S et F ne sont pas indépendants (0,5)

c) $P_S(F) = P_F(S) \times \dfrac{P(F)}{P(S)} = 0,95 \times \dfrac{0,92}{0,934} \approx 0,936$ (1)

3) a) $p(B=0) = p(\overline{F}) = 0,08$ (0,5)

$p(B=10) = p(F \cap S) = p_F(S) \times p(F) = 0,92 \times 0,95 = 0,874$ (0,5)

$p(B=5) = 1 - p(B=0) - p(B=10) = 0,046$ (0,5)

b_i	0	5	10
$p(B=b_i)$	0,08	0,046	0,874

b) $E(B) = 0 \times 0,08 + 5 \times 0,046 + 10 \times 0,874 = 8,97$. (1)

Il s'agit là de ce que rapporte en moyenne un jouet de cette entreprise (0,5)

4) Il s'agit de la probabilité de la liste "FFFFFFFFFF".

$p(X=10) = p(S)^{10} = (0,934)^{10} \approx 0,505$. (1)

/10

Ex2 : (11)

A) 1) $(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)(-i)+17i=0 \Rightarrow -i$ est solution de (E) (0,5)

2) $(z+i)(az^2+bz+c) = az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ic$

$= az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ic$

$$\begin{cases} a=1 \\ b+ai=-8+i \\ c+bi=17-8i \\ ic=17i \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \end{cases}$$

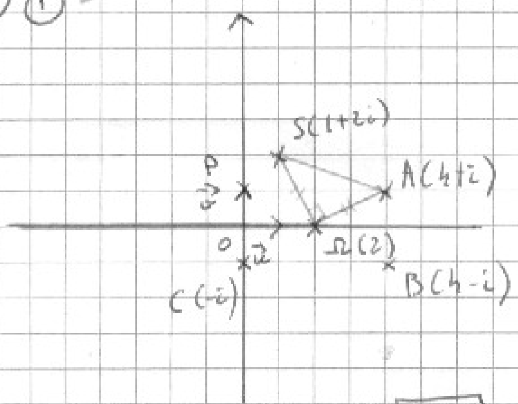
D'où (E) $\Leftrightarrow (z+i)(z^2-8z+17)=0$ (1,5)

3) $\Delta = 64-4\times 17=-4 \Rightarrow z_1=\dfrac{8+i\sqrt{4}}{2}$ ou $z_2=\dfrac{8-i\sqrt{4}}{2}$

$z_1=4+i$ ou $z_2=4-i$

$S=\{-i\ ;\ 4+i\ ;\ 4-i\}$ (1)

B) 1)



(0,5)

2) $\Omega A = |4+i-2| = |2+i| = \sqrt{5}$

(1) $\Omega S = |1+2i-2| = |-1+2i| = \sqrt{5}$ } ΩAS est isocèle en Ω. (0,5)

$AS = |1+2i-4-i| = |-3+i| = \sqrt{10}$

(0,5)

$\Omega A^2+\Omega S^2 = AS^2$ donc d'après la réciproque du Th. de Pythagore ΩAS est rectangle en Ω.

3) $\Omega B = |4-i-2| = |2-i| = \sqrt{5}$

$\Omega C = |-i-2| = \sqrt{5}$ } A, B, S, C sont sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$. (1)

4) a) $z_{A'} = \dfrac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2} = \dfrac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{20-5i}{5} = 4-i$

$z_{B'} = \dfrac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2} = \dfrac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \dfrac{20+15i}{5} = 4+3i$ (1,5)

$z_{C'} = \dfrac{i\times(-i)+10-2i}{-i-2} = \dfrac{(11-2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-20+15i}{5} = -4+3i$

b) $PA' = |4 - i - i| = |4-2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$PB' = |4+3i-i| = |4+2i| = 2\sqrt{5}$
$PC' = |-4+3i-i| = |-4+2i| = 2\sqrt{5}$

$\Big\}$ A', B' et C' sont bien sur le cercle $(\mathcal{C}')$ de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$ (1,5)

c) $|z'-i| = \left|\dfrac{iz+10-2i}{z-2} - i\right| = \left|\dfrac{iz+10-2i-iz+2i}{z-2}\right| = \left|\dfrac{10}{z-2}\right| = \dfrac{10}{|z-2|}$ (1)

d) $M(z) \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{10}{|z-2|} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |z'-i| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow M' \in (\mathcal{C}')$ (2,5)

Ex 3 (10)

A 1) $g'(x) = e^x - 1$ (1)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
g		$+$	0	$+$	

(1)

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x - 1 = +\infty$ (0,5)

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)$ (1,5)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

2) $g(x) \geq 0$ donc $e^x - x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (0,5)

$e^x - x$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$

B 1) a) $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1}$.

* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0^+$ (2)

* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{-\infty} f = -1$

b) $(d_1) : y = 0$ est asymptote en $+\infty$ et $(d_2) : y = -1$ est asymptote en $-\infty$ (0,5)

2) a) $f'(x) = \dfrac{e^x - x - (e^x - 1)x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$ (1)

b)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

(1)

3) a) $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = x$ (1)

b) On a vu que $e^x - x > 0$ donc $f(x)$ est négatif sur $]-\infty; 0]$ et positif sur $[0; +\infty[$