DS n°4

Ex1 : P = "roman Policier", F = "auteur Français". (17)

① $p(P) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \to$ (b)

② $p_P(F) = 0{,}4 \to$ (c)

③ $p(P \cap F) = p_P(F) \times p(P) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3 \to$ (c)

④ $p(F) = p_P(F)p(P) + p_{\bar P}(F)p(\bar P) = 0{,}4 \times 0{,}75 + 0{,}7 \times \cancel{0{,}25} = 0{,}475 \to$ (c)

⑤ $p_F(P) = p_P(F) \times \frac{p(P)}{p(F)} = 0{,}4 \times \frac{0{,}75}{0{,}475} = \frac{12}{19} \to$ (b)

⑥ V = "au moins un policier". $p(\bar V) = p(\text{"}\bar P\text{"}) = 0{,}25^{20} \Rightarrow p(V) = 1 - 0{,}25^{20} \to$ (a)

⑦ il y a 10 listes possibles et équiprobables $\begin{cases} PP\bar P\bar P\bar P\,;\ P\bar P P\bar P\bar P\,;\ P\bar P\bar P P\bar P,\ P\bar P\bar P\bar P P\,;\ \bar P PP\bar P\bar P\,;\ \bar P P\bar P P\bar P\,; \\ \bar P P\bar P\bar P P\,;\ \bar P\bar P PP\bar P\,;\ \bar P\bar P P\bar P P\,;\ \bar P\bar P\bar P PP \end{cases}$

$p(PP\bar P\bar P\bar P) = 0{,}75^2 \times 0{,}25^3$ donc la probabilité cherchée est $10 \times 0{,}75^2 \times 0{,}25^3 \simeq 0{,}0879 \to$ (a)

Ex2. (7,0)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ (0,5)

. $x^3+5x^2+7x+3 = (x+3)(x^2+2x+1)$ ①

$\lim\limits_{-3} f = \lim\limits_{x\to-3} \frac{(x+3)(x^2+2x+1)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to-3} \frac{x^2+2x+1}{x-3} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3}$ (0,5)

. $\lim\limits_{x\to3} x^3+5x^2+7x-3 = 96$

$\lim\limits_{x\to3^-} x^2-9 = 0^-$ donc $\lim\limits_{3^-} f = -\infty$ (0,5)

$\lim\limits_{x\to3^+} x^2-9 = 0^+$ donc $\lim\limits_{3^+} f = +\infty$ (0,5)

2. $f(x) = \frac{x+4-x+2}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}} = \frac{6}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+2}}$ (0,5)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+4}+\sqrt{x+2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. (0,5)

3. $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+2}{x-3} = \dfrac{\sqrt{x}}{x}\,\dfrac{2+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{3}{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,\dfrac{2+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1-\frac{3}{x}}$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2+\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{3}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{array}\right\} \quad \lim_{+\infty} f = 0 \times \frac{2}{1} = 0$$ (0,5)

(4) Soit $u(x) = \cos(x)$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -\sin(x)$.

$f(x) = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\cos x + 1}{x-\pi} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{u(x)-u(\pi)}{x-\pi}$ donc $\lim\limits_{\pi} f = u'(\pi) = -\sin(\pi) = 0$ (1,5)

Ex3 :

1. a) $g'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x+1)$ (0,5)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	-1	↗	$+\infty$

$g(-\frac{1}{3}) =$

$g(0) = -1$ (1)

b) * sur $]-\infty\,;0]$, $g(x) < 0$ donc $g(x) = 0$ n'a aucune solution. (0,5)

* sur $[0\,;+\infty[$, g est continue et strictement croissante
$g(0) = -1$, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ et $0 \in]-1\,;+\infty[$ } D'après le Th des valeurs intermédiaires, il existe unique $\alpha \in]-1;+\infty[$ tq $g(\alpha) = 0$ (1,5)

(0,5) $g(0,657) < 0$, $g(0,658) > 0$ } $\alpha \in]0,657\,; 0,658[$ donc $\alpha \approx 0,66$ à 10^{-2} près.

c)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	

(0,5)

2) a) $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(2x + 1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 1}{3x^2} = \dfrac{g(x)}{3x^2}$ (0,5)

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\approx 0,87$	↗	$+\infty$

(1)