DS n°2

Ex1 : 10

1. a) $x^2-4x+8>0$ $\quad \Delta = 16-4\times 8 = -16$ $\quad D_f = \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ 1

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+8 = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ 0,5

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+8 = +\infty$ donc $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ 0,5

c) $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+8}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+8}}$ 0,5

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

1,5

2. a)

$f(x)-y = \sqrt{x^2-4x+8}-(x-2) = \dfrac{x^2-4x+8-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+8}+(x-2)} = \dfrac{x^2-4x+8-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}+x-2} = \dfrac{4}{\sqrt{x^2-4x+8}+x-2}$ 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4x+8}+x-2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-y = 0^+$ 0,5

(d_1) est asymptote à (C_f) en $+\infty$

b) De même, $f(x)-y = \dfrac{x^2-4x+8-(-x+2)^2}{\sqrt{x^2-4x+8}+(-x+2)} = \dfrac{x^2-4x+8-x^2+4x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}+(-x+2)} = \dfrac{4}{\sqrt{x^2-4x+8}-x+2}$ 1

$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-4x+8}-x+2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-y = 0^-$ 0,5

(d_2) est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

c) $y = f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $y=2$. 0,5 + Courbe → 1,5

Ex2 : 8

① $U_1 = 2$; $U_2 = \frac{7}{2}$; $U_3 = \frac{43}{11}$; $U_4 = \frac{259}{65}$; $U_5 \approx 3,99957$; $U_6 \approx 3,99993$; $U_7 \approx 3,99999$ 1

② * Rang initial : $U_0 = 0 \geq 0$

* supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $U_n \geq 0$ 1,5

$U_{n+1} = \dfrac{5U_n+4}{U_n+2} > 0$

* Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 0$

③ $f(x) = x \iff 5x+4 = x^2+2x \iff x^2-3x-4=0$ (avec $x \neq 2$)

$\Delta = 9-4\times(-4) = 25$

$a = \dfrac{3+5}{2} = 4$ ou $b = \dfrac{3-5}{2} = -1$ 1

4) a) $V_n = \dfrac{U_n - 4}{U_n + 1}$

$V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} - 4}{U_{n+1} + 1} = \dfrac{\frac{5U_n+4}{U_n+2} - 4}{\frac{5U_n+4}{U_n+2} + 1} = \dfrac{5U_n + 4 - 4U_n - 8}{U_n + 2} \div \dfrac{5U_n + 4 + U_n + 2}{U_n + 2} = \dfrac{U_n - 4}{6U_n + 6}$ (1,5)

Ainsi $V_{n+1} = \dfrac{1}{6} V_n$ et (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$ (0,5)

$V_0 = \dfrac{U_0 - 4}{U_0 + 1} = -4$

b) $(U_n + 1) V_n = U_n - 4$

$U_n \times V_n + V_n = U_n - 4$

$U_n (V_n - 1) = -V_n - 4$

$U_n = \dfrac{-V_n - 4}{V_n - 1}$ $\qquad V_n = V_0 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n = -4 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^n.$ (1,5)

c) $\lim V_n = 0$ donc $\lim U_n = \dfrac{-0-4}{0-1} = 4.$ (1)

Ex3 : On appelle (U_n) la suite tq U_n soit le salaire après n années.

(1) $\begin{cases} U_0 = 13000 \\ U_{n+1} = 13000 \times 1{,}05 \end{cases}$ il s'agit d'une suite géométrique.

$S_{39} = U_0 \dfrac{1 - q^{40}}{1 - q} = 13000 \dfrac{1 - (1{,}05)^{40}}{1 - 1{,}05} \approx 1\,570\,400$ € (1)

(2) $\begin{cases} U_0 = 15\,000 \\ U_{n+1} = U_n + 640 \end{cases}$ Il s'agit d'une suite arithmétique

$S_{39} = \dfrac{39+1}{2} (2U_0 + n\,r) = \dfrac{40}{2} (30000 + 39 \times 640) = 1\,099\,200$ €. (1)

Ex3 :

$(1+i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$

$(1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i$ (1)