Correction DS n°1

Ex1.

a) $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 5-i \\ z_1 - z_2 = 2i \quad L_2 \times 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 5-i \quad L_1 - L_2 \\ 2z_1 - 2z_2 = 4i \end{cases}$

$\begin{cases} 5z_2 = 5-5i \\ z_1 = \dfrac{4i+2z_2}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} z_2 = 1-i \\ z_1 = \dfrac{4i+2-2i}{2} = 1+i \end{cases}$

$S = (1+i ; 1-i)$

1,5

b) Posons $Z = \dfrac{3z+2i}{iz-2}$ $(z \neq 2i)$

• $Z^2 + Z - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4\times 2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ Z_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$ 0,5

• D'où : $\dfrac{3z+2i}{iz-2} = 1$ ou $\dfrac{3z+2i}{iz-2} = -2$

$3z + 2i = iz - 2$

$(3-i)z = -2-2i$

$z = \dfrac{(-2-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$z = \dfrac{-6-2i-6i+2}{10}$

$z = -\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i$ 1

$3z + 2i = -2iz + 4$

$(3+2i)z = 4-2i$

$z = \dfrac{(4-2i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$z = \dfrac{12-8i-6i-4}{13}$

$z = \dfrac{8}{13} - \dfrac{14}{13}i$ 1

$S = \left\{-\dfrac{2}{5} - \dfrac{4}{5}i ; \dfrac{8}{13} - \dfrac{14}{13}i\right\}$

Ex2

1. a) $p(-1) = (-1)^3 - 3\times(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1-3-3+7 = 0$: on peut factoriser p par $z+1$ 0,5

b) $p(z) = (z+1)(az^2+az+b) = z^3 + az^2 + bz + z^2 + az + b = z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b$

$\begin{cases} a+1 = -3 \\ b+a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \\ b = 7 \end{cases}$ Donc $p(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$ 1

c) $z + 1 = 0$ ou $z^2 - 4z + 7 = 0$

$z = -1$

$\Delta = 16 - 7\times 4 = -12$

$z_1 = \dfrac{4+i\sqrt{12}}{2} = \dfrac{4+2i\sqrt{3}}{2} = 2 + i\sqrt{3}$

$z_2 = 2 - i\sqrt{3}$

$S = \{-1 ; 2+i\sqrt{3} ; 2-i\sqrt{3}\}$ 0,5

2. a) $AB = \sqrt{(2-(-1))^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(2-2)^2 + (-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

} ABC est équilatéral. 1,5

b. Pour tout M du plan, $(1+a)\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$

Pour $M = O$, $\overrightarrow{OG} = -\frac{1}{1+a}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{1+a}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{1+a}\overrightarrow{OC}$

$$z_G = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a}(2+i\sqrt{3}) + \frac{2}{1+a}(2-i\sqrt{3})$$

$$z_G = \frac{1+2a+4}{1+a} + i\,\frac{a\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{1+a} \quad 2$$

c) z_G est un pur si et seulement si $\frac{1+2a+4}{1+a} = 0$ cad ssi $a = -\frac{5}{2}$ } 1 + 1 en bonus.

d) $z_G = \frac{\left(-\frac{5}{2}-2\right)\sqrt{3}}{1-\frac{5}{2}}i = \frac{-\frac{9\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}}i = -\frac{9}{2} \times \frac{2}{-3}\sqrt{3}\,i = 3\sqrt{3}\,i$

Ex3 :

1) f est définie et dérivable sur $]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;1[\,\cup\,]1;+\infty[$ (cf l'équation en Z de l'exo 1) 1

$$f'(x) = \frac{(6x+2)(x^2+x-2)-(2x+1)(3x^2+2x-1)}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{6x^3+6x^2-12x+2x^2+2x-4-6x^3-4x^2+2x-3x^2-2x+1}{(x^2+x-2)^2}$$

$$= \frac{x^2-10x-3}{(x^2+x-2)^2} \quad 2$$

2) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \cos x \times \cos x + (-\sin x \times \sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x \quad 1{,}5$$

3) f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ 1

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{4x-2x-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x-1}{2x\sqrt{x}} \quad 2$$

4) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x(4x+2)^8 + 4 \times 8 \times (4x+2)^7 \times x^2$$

$$= x(4x+2)^7\left(2(4x+2) + 32x\right)$$

$$= x(4x+2)^7(40x+4) \quad 2$$