DM n°8

Ex1 :

. Posons $x = HC$, $x \in [0;10]$. On a alors $AH = 10 - x$.

. le tps de parcours de A à H est de $\frac{1}{40}(10-x)$ car $t = \frac{d}{v}$.

. —————— H à C est $\frac{1}{20}\sqrt{x^2+16}$ car $AH = \sqrt{x^2+16}$ (Pythagore ds HBC ⊥)

le tps de parcours total est $t(x) = \frac{10-x}{40} + \frac{\sqrt{x^2+16}}{20}$

$x^2+16>0$ donc t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$t'(x) = \frac{-1}{40} + \frac{2x}{40\sqrt{x^2+16}} = \frac{2x - \sqrt{x^2+16}}{40\sqrt{x^2+16}} = \frac{3x^2-16}{40\sqrt{x^2+16}\,(2x+\sqrt{x^2+16})} \text{ (exp conj)}$$

→ $x \in [0,10]$ donc $40\sqrt{x^2+16}\,(2x+\sqrt{x^2+16}) > 0$

→ $3x^2-16 = (\sqrt{3}x-4)(\sqrt{3}x+4)$

x	0		$\frac{4}{\sqrt{3}}$		20
$t'(x)$		$-$	0	$+$	
t		↘		↗	

5

Le tps de parcours minimum est obtenu pour $x = \frac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31$ km.

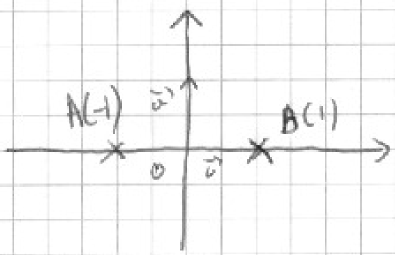
Ex2 :

1. si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = \frac{|1+\lambda i|}{|1-\lambda i|} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}} = 1$

3

2. $\left|\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\right| = 1 \Leftrightarrow |1+\lambda i| = |1-\lambda i| \Leftrightarrow |-1-\lambda i| = |1-\lambda i|$

En posant $A(-1)$ et $B(1)$ et $M(\lambda i)$, $\left|\frac{1+\lambda i}{1+\lambda i}\right| = 1 \Leftrightarrow AM = BM$

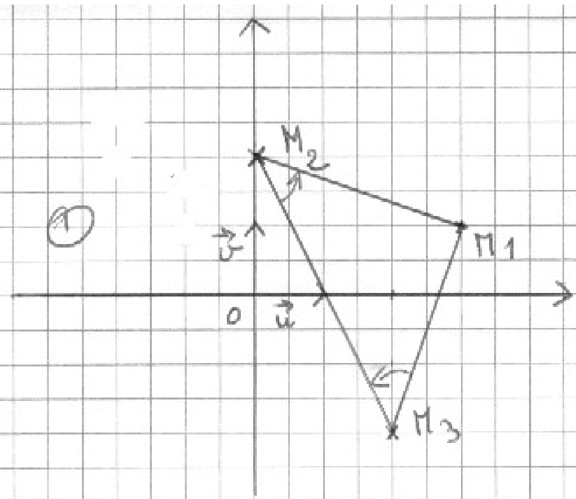


$\Leftrightarrow$ Le lieu de M est la médiatrice de [AB]

$\Leftrightarrow$ λi est imaginaire pur

$\Leftrightarrow$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Ex3.



• $z_1 = 1+2i-i+2 = 3+i$

• $z_2 = \frac{(2+6i)(3+i)}{9+1} = \frac{6+2i+18i-6}{10} = \frac{+20i}{10} = 2i$ 1

• $z_3 = \frac{4i(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{-4+4i}{-2} = 2-2i$

• $(\overrightarrow{M_1M_3} ; \overrightarrow{M_1M_2}) = -(\vec{u} ; \overrightarrow{M_1M_3}) + (\vec{u} ; \overrightarrow{M_1M_2})\ (2\pi)$

$\overrightarrow{M_1M_3}\ (2-2i-3-i)$ donc $\overrightarrow{M_1M_3}\ (-1-3i)$

→ $M_1M_3 = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$\left.\begin{array}{l} \cos(\mathrm{Arg}(-1-3i)) = -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \sin(\mathrm{Arg}(-1\ \ )) = \frac{-3}{\sqrt{10}} < 0 \end{array}\right\}$ $\mathrm{Arg}(-1\ \ ) = -\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) (2\pi) \approx -1{,}89 \text{ rad } (2\pi)$

→ $\overrightarrow{M_1M_2}\ (\ \ 2i-3-i)$ donc $\overrightarrow{M_1M_2}\ (-3+i)$ 2

$M_1M_2 = \sqrt{10}$

$\left.\begin{array}{l} \cos(\mathrm{Arg}(-3+i)) = \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \sin(\mathrm{Arg}(-3+i)) = \frac{1}{\sqrt{10}} > 0 \end{array}\right\}$ $\mathrm{Arg}(-3+i) = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) (2\pi) \approx 2{,}82 \text{ rad } (2\pi)$

D'où $(\overrightarrow{M_1M_3} ; \overrightarrow{M_1M_2}) \approx 4{,}71\ (2\pi) \approx -1{,}57\ (2\pi) \approx 90°$

• $M_1M_2 = M_1M_3$ donc $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_1

donc $\widehat{M_3M_2M_1} = \widehat{M_2M_3M_1} = 45°$ 1

Ex4 : le nbre total de noyaux de carbone vérifie $N'(t) = -1{,}21.10^{-4}\, N(t)$

donc $N(t) = N_0\, e^{-1{,}21.10^{-4} t}$ où N_0 est le nbre de noyaux à $t = 0$ 1

la demi-vie d'un atome est le t pl t tq $N(t) = \frac{N_0}{2} = N_0\, e^{-1{,}21.10^{-4} t}$

D'où $t = \frac{\ln 2}{1{,}21.10^{-4}} \approx 52728$ ans. 2

Comme il reste 25 % (un quart) des atomes de départ, le bois fossilisé

a environ $2 \times 52728 \approx 11400$ ans.