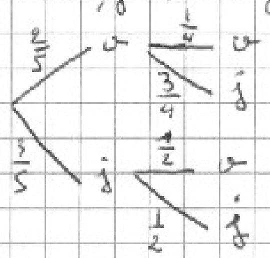
DM n°7.

Ex1 : v : "boule verte", j : "boule jaune"



1) a) $p(V) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ $\qquad p(J) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

b) • On lance la roue : il a $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ chance d'être remboursé $\Rightarrow p_V(R) = \frac{5}{8}$

• $p(V \cap R) = p_V(R) \times p(V) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{80}$.

c) $p(R) = p_V(R)\,p(V) + p_J(R)\,p(J) + p_{\bar{J} \cap \bar{V}}(R)\,p(\bar{J} \cap \bar{V})$ car V, J et $\bar{V} \cap \bar{J}$ forment une partition

$= \frac{5}{8} \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 0 \times p(\bar{J} \cap \bar{V})$

$= \frac{29}{80}$

d) • Pour que c = "gagner 100 €" soit réalisé, il faut tirer 2 boules vertes puis tomber sur la case 100 €. Ces expériences étant indépendantes :

$p(c) = p(V) \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$

• Pour que d = "gagner vingt euros" soit réalisé, il faut tirer 2 boules vertes puis tomber sur la bonne case. Ces expériences étant indépendantes :

$p(d) = p(V) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{40}$.

2) a) b)

x_i	$-m$	0	$20-m$	$100-m$
$p(X=x_i)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{80}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{80}$

$p(X=-m) = 1 - \frac{29}{80} - \frac{1}{40} - \frac{1}{80} = \frac{3}{5}$

c) $E(X) = \frac{3}{5} \times -m + 0 \times \frac{29}{80} + \frac{20-m}{40} + \frac{100-m}{80} = \frac{-48m + 40 - 2m + 100 - m}{80} = \frac{140 - 51m}{80}$.

d) il faut $E(X) > 0$

$140 - 51m > 0$

$m > \frac{140}{51}$ $\Rightarrow$ La mise minimale doit être de 2,75 € environ.

3. a) * C'est l'évènement contraire de "ne jamais perdre sa mise". La probabilité de ne pas perdre est : $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

* La probabilité de ne pas perdre sa mise quatre fois est donc $\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$

* La probabilité de perdre au moins une fois est donc $1-\frac{16}{625}=\frac{609}{625}$.

b) Soit P = "perdre sa mise".

. Les 6 listes possibles sont $\overline{P}\overline{P}PP$, $\overline{P}P\overline{P}P$, $\overline{P}PP\overline{P}$, $P\overline{P}\overline{P}P$, $P\overline{P}P\overline{P}$, $PP\overline{P}\overline{P}$

. Chaque liste a une probabilité de $\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{36}{625}$

. Ainsi, la probabilité de perdre exactement 2 fois est $6\times\frac{36}{625}=\frac{216}{625}$.

Ex 2

① . $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x=+\infty$

. $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{x\mapsto-\infty}x=-\infty$

. $x^3-2x^2+3x-2=(x-1)(x^2-x+2)$ (Identification)

$\lim\limits_{x\mapsto1}\frac{(x-1)(x^2-x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\mapsto1}\frac{x^2-x+2}{x+1}=\frac{2}{2}=1$

② $\lim\limits_{2} f=\lim\limits_{x\mapsto2}\frac{x+2}{(x+2)(x-4)}=\lim\limits_{x\mapsto2}\frac{1}{x-4}=\frac{1}{-2}$

③ $f(x)=\frac{x+2-(x+1)}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (conjugué)

$=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=+\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f=0$

④ posons $u(x)=\cos(x)$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=-\sin(x)$

$u\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ donc ...

$f(x)=\frac{u(x)-u\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$

C'est, par définition, le taux d'accroissement de u entre x et $\frac{\pi}{2}$. Comme u est dérivable en $\frac{\pi}{2}$:

$\lim\limits_{x\mapsto\frac{\pi}{2}} f(x)=u'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

⑤ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto1^+}x+2=3\\ \lim\limits_{x\mapsto1^+}x-1=0^+\end{array}\right\}\lim\limits_{x\mapsto1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto1^+}\frac{x+2}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\mapsto1^+}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=+\infty$