DM n°4

Ex 1 : (13,5)

① $U_1 = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$ $\quad U_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ $\quad U_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$. (0,5)

② a) $w_1 = \frac{1}{2}$ $\quad w_2 = \frac{2}{3}$ $\quad w_3 = \frac{3}{4}$: il semble que $w_n = U_n$. (0,5)

b) * $U_0 = V_0$: la proposition est vraie au rang initial (0,5)

* Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $U_n = V_n$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2-U_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1+1} = w_{n+1}$$ (1,5)

* Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = w_n$. (0,5)

3. $U_n = w_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x+1}$: étudions f sur $[0;+\infty[$.

① • $f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$: f est croissante strict^t sur $[0;+\infty[$ donc (U_n) aussi

① • $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n < 1$

et $\lim U_n = 1$.

Ex 2 / (14,5)

① • il faut $x \neq 0$ et $\frac{x+1}{x} \geq 0$

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	‖	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x+1}{x}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

donc $x \in]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$. ①

• si $x \in]-\infty;-1] \cup]0;+\infty[$, $(E) \iff \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 \iff x^4+3x^2-2x+1 = 0$ (1)

② $f'(x) = 4x^3+6x-2$ et $f''(x) = 12x^2+6$ ①

	$-\infty$	0	α	1	$+\infty$
$f''(x)$			$+$		
f'		-2	0	8	

①

f' est définie, continue et strict^t croissante sur $[0;1]$

$f'(0) = -2$
$f'(1) = 8$
$0 \in]-2;8[$

D'après le TH. des valeurs int. il existe un unique $\alpha \in]0;1[$ tq $f'(\alpha) = 0$ (2)

Comme $f(0{,}31) < 0$ et $f(0{,}32) > 0$, $\alpha \in]0{,}31;0{,}32[$ ①

b)

x	-1	β	α	γ	1
$f'(x)$	$-$		0	$+$	
f	$5 \searrow$	0	$\approx -1,3$	0	$\nearrow 1$

(1,5)

* sur $[-1;1]$ est f définie et continue et :

→ sur $[-1;\alpha]$ f est strictement monotone

(2,5)

$f(-1)=5$ } D'après le Th. des valeurs intermédiaires,

$f(\alpha)\approx -1,3$ } il existe un unique $\beta \in]-1;\alpha[$ tq $f(\beta)=0$.

$0 \in]-1,3;5[$ } $f(-0,33)<0$ et $f(-0,34)>0$ donc $\beta \in]-0,34;-0,33[$

→ sur $]\alpha;1]$, f est strictement monotone

(2,5)

$f(\alpha)\approx -1,3$ } D'après le Th. des valeurs intermédiaires,

$f(1)=1$ } il existe un unique $\gamma \in]\alpha;1[$ tq $f(\gamma)=0$

$0 \in]-1,3;1[$ } $f(0,85)<0$ et $f(0,86)>0$ donc $\gamma \in]0,85;0,86[$

(3) Il faut que les solutions de E soit dans $]-\infty;-1] \cup]0;+\infty[$.

(E) n'a donc qu'une unique solution : $\beta \in]0,85;0,86[$. (1)