

DM n°4

Ex1: (1,5)

① $U_1 = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$ $U_2 = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ $U_3 = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$ (0,5)

② a) $w_1 = \frac{1}{2}$ $w_2 = \frac{2}{3}$ $w_3 = \frac{3}{4}$: il semble que $w_n = U_n$. (0,5)

b) * $U_0 = V_0$: la proposition est vraie au rang initial (0,5)

* Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq $U_n = V_n$

$U_{n+1} = \frac{1}{2+U_n} = \frac{1}{2+\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2n+2+n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+1+1} = w_{n+1}$ (0,5)

* Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = w_n$. (0,5)

3. $U_n = w_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{x+1}$: étudions f sur $[0; +\infty[$.

①. $f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$: f est croissante strictement sur $[0; +\infty[$ donc (U_n) croissante

②. $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n < 1$

Ex2 (1,5)

①. il faut $x \neq 0$ et $\frac{x+1}{x} \geq 0$

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	-		-	+
$x+1$	-	0	+	+
$\frac{x+1}{x}$	+	0	-	+

donc $x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$. (1)

soit $x \in]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 = \sqrt{x^2+4}$ $\Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 2x - 1 = 0$ (1)

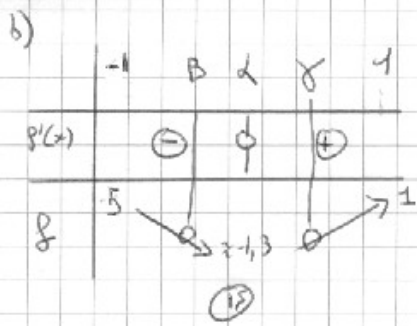
② $f'(x) = 4x^3 + 6x - 2$ et $f''(x) = 12x^2 + 6$ (1)

	$-\infty$	$0,31$	1	$+\infty$
$f''(x)$				
f'		-	0	+

f' est définie, continue et strictement croissante sur $[0; 1]$

$f'(0) = -2$
 $f'(1) = 8$
 $0 \in]-2; 8[$ } D'après le Th. des valeurs int. il existe un unique $\alpha \in]0; 1[$ tq $f'(\alpha) = 0$ (2)

Comme $f(0,31) < 0$ et $f(0,32) > 0$, $\alpha \in]0,31; 0,32[$ (1)



* sur $[-1; 1]$ est f définie et continue et :

→ sur $[-1; \alpha]$ f est strictement croissante

② $f(-1) = -5$
 $f(\alpha) = -1,3$
 $\alpha \in]-1,3; -5[$

D'après le Th. des valeurs intermédiaires,
il existe un unique $\beta \in]-1; \alpha[$ tel que $f(\beta) = 0$.
 $f(0,33) < 0$ et $f(-0,33) > 0$ donc $\beta \in]-0,33; 0,33[$

→ sur $[\alpha; 1]$, f est strictement décroissante

③ $f(\alpha) = -1,3$
 $f(1) = 1$
 $\alpha \in]-1,3; 1[$

D'après le Th. des valeurs intermédiaires,
il existe un unique $\gamma \in]\alpha; 1[$ tel que $f(\gamma) = 0$.
 $f(0,85) < 0$ et $f(0,86) > 0$ donc $\gamma \in]0,85; 0,86[$

④ Il faut que les solutions de E soit dans $]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$.

(E) n'a donc qu'une unique solution : $\beta \in]0,85; 0,86[$. ①