Correction DM n-2

Ex1 :

① $p(z)=(z^2+3)(az^2+bz+c)=az^4+bz^3+cz^2+3az^2+3bz+3c=az^4+bz^3+(c+3a)z^2+3bz+3c$

D'où : $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c+3\times1=24 \\ 3b=-18 \\ 3c=63 \end{cases}$ Soit : $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=21 \\ b=-6 \\ c=21 \end{cases}$ $p(z)=(z^2+3)(z^2-6z+21)$ (1,0)

② $p(z)=0 \Leftrightarrow z^2+3=0$ ou $z^2-6z+21=0$

* $z^2=-3$

$z=\sqrt{3}i$ ou $z=-\sqrt{3}i$

* $z^2-6z+21=0$

$\Delta=36-4\times21=-48 \Rightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{6+i\sqrt{48}}{2}=\dfrac{6+4i\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3} \\ z_2=3-2i\sqrt{3} \end{cases}$

$\mathcal{S}=\{\sqrt{3}i\,;-\sqrt{3}i\,;3+2i\sqrt{3}\,;3-2i\sqrt{3}\}$ (1,0)

③ a)

Soit $I(3)$

$AI^2=(3-0)^2+(0-\sqrt{3})^2=12$

$BI^2=(3-0)^2+(0+\sqrt{3})^2=12$

$CI^2=(3-3)^2+(2\sqrt{3}-0)^2=12$

$DI^2=(3-3)^2+(-2\sqrt{3}-0)^2=12$

A, B, C, D sont sur le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (1,5)

b) $E(-3+2i\sqrt{3})$

* $BE^2=(-3-0)^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{3})^2=9+27=36$

$BC^2=(3-0)^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{3})^2=36$

$EC^2=(3+3)^2+(2\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2=36$

BEC est équilatéral (1,5)

c) BECF parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{BE}=\vec{FC}$

$\Leftrightarrow -3+2i\sqrt{3}-(-i\sqrt{3})=3+2i\sqrt{3}-z_F$ où $F(z_F)$

$\Leftrightarrow z_F=3+2i\sqrt{3}+3-2i\sqrt{3}-i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow F(6-i\sqrt{3})$ (1,5)

Comme $BE=BC$, BECF est un losange (0,5)

d) $\vec{EA}(i\sqrt{3}+3-2i\sqrt{3})$ $\vec{EF}(6-i\sqrt{3}+3-2i\sqrt{3})$

$\vec{EA}(3-i\sqrt{3})$ $\vec{EF}(9-3i\sqrt{3})$

$\vec{EF}=3\vec{EA}$ donc $\vec{EF}$ et $\vec{EA}$ sont colinéaires donc E, F et A sont alignés.

(2)

Ex2

① • $D_f = \mathbb{R}^+$

• f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais qu'en est-il en 0 ?

$$- \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h} - 0\sqrt{0}}{h} = \frac{h}{h}\sqrt{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h}\sqrt{h} = \lim_{h\to 0}\sqrt{h} = 0$$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$

② $f'(x) = 1\times\sqrt{x} + x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

③

	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

④ en 1 : $y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

en 4 : $y = f'(4)(x-4)+f(4)$

$y = 3x - 4$