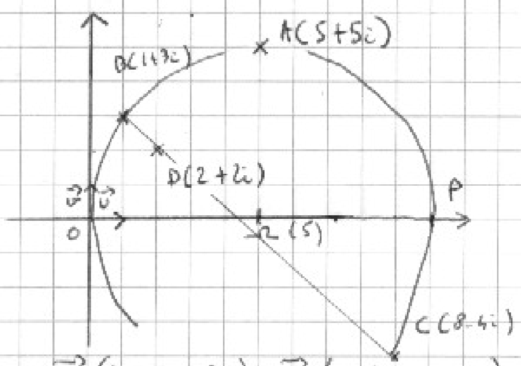
DM n°11

Ex1 (/8)

Partie A.



① Soit $\Omega(5)$.

$\|\vec{\Omega B}\| = |1+3i-5| = |-4+3i| = \sqrt{16+9} = 5$

$\|\vec{\Omega A}\| = |5+5i-5| = 5$

$\|\vec{\Omega O}\| = \|\vec{\Omega P}\| = 5$

$\|\vec{\Omega C}\| = |8-4i-5| = |3-4i| = 5$

O, B, A, P et C sont sur $\mathcal{C}(\Omega, 5)$ (1)

② • $\vec{BD}(2+2i-1-3i)$, $\vec{BC}(8-4i-1-3i)$

$\vec{BD}(1-i)$, $\vec{BC}(7-7i)$: on a $\vec{BC} = 7\vec{BD}$ donc $D \in (BC)$ (1)

• $(\vec{OD}; \vec{BD}) = \operatorname{Arg}\left(\frac{2+2i-1-3i}{2+2i}\right)(2\pi) = \operatorname{Arg}\left(\frac{(1-i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}\right)(2\pi) = \operatorname{Arg}\left(\frac{-4i}{8}\right)(2\pi) = -\frac{\pi}{2}(2\pi)$

donc $(OD) \perp (BD)$ et $D \in (BC)$. D est bien le projeté orthogonal de O sur (BC) (2)

Partie B

① $(\vec{OM}; \vec{OM'}) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z'}{z}\right)(2\pi) = \operatorname{Arg}\left(\frac{20}{z\bar{z}}\right)(2\pi) = \operatorname{Arg}\left(\underbrace{\frac{20}{|z|^2}}_{\in \mathbb{R}^{+*}}\right) = 0\,(2\pi)$

donc O, M et M' sont alignés (1,5)

② a) $M \in (d)$ donc $M(2+ib)$ où $b \in \mathbb{R}$ donc $z + \bar{z} = 2+ib + \overline{2+ib} = 4$ (0,5)

b) • $z' + \bar{z}' = \frac{20}{\bar{z}} + \frac{20}{z} = \frac{20(z+\bar{z})}{z\bar{z}} = \frac{80}{z\bar{z}}$ (0,5)

• $5(z' + \bar{z}') = \frac{400}{z\bar{z}} = \frac{20}{z} \times \frac{20}{\bar{z}} = z' \times \bar{z}'$ (0,5)

c) • O, M, M' sont alignés donc $M' \in (OM)$

• $\Omega M'^2 = |z'-5|^2 = (z'-5)(\overline{z'-5}) = (z'-5)(\bar{z}'-5) = \underbrace{z'\bar{z}' - 5(z'+\bar{z}')}_{0} + 25 = 25$ (0,5)

donc $M' \in (\mathcal{C})$

Ex2 : /16

① $P_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$ (0,5)

② $p(R_{n+1}\cap R_n) = P_{R_n}(R_{n+1}) \times p(R_n) = \frac{1}{20} p_n$

$p(R_{n+1}\cap \overline{R_n}) = P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \times p(\overline{R_n}) = \frac{1}{5} q_n$ (1)

③ R_n et $\overline{R_n}$ formant une partition :

$p(R_{n+1}) = P_{R_n}(R_{n+1})\,p(R_n) + P_{\overline{R_n}}(R_{n+1})\,p(\overline{R_n})$

$p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} q_n$ (1,5)

④ comme $q_n = 1 - p_n$, $p_{n+1} = \frac{1}{20} p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} p_n = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n$ (0,5)

⑤ a) $v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{4}{23} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} p_n - \frac{4}{23} = \frac{3}{115} - \frac{3}{20} p_n = -\frac{3}{20}\left(p_n - \frac{4}{23}\right) = -\frac{3}{20} v_n$ (1,5)

(v_n) est géométrique de premier terme $v_1 = p_1 - \frac{4}{23} = -\frac{4}{23}$ et de raison $q = -\frac{3}{20}$

b) $v_n = \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} \times -\frac{4}{23}$ donc $p_n = \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} \times \frac{-4}{23} + \frac{4}{23}$ (0,5)

c) Comme $-\frac{3}{20} \in]-1;1[$, $\lim \left(-\frac{3}{20}\right)^{n-1} \times \frac{-4}{23} = 0$ et $\lim p_n = \frac{4}{23}$. (0,5)

Ex3 : /16

① $f(x) = \frac{x}{e^x} = 1 \div \left(\frac{e^x}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = 0^+$ (1)

② f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)e^{-x}$. (1)

en 0 la tangente a pour équation : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ c.a.d $y = x$ (1)

③

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

(1)

④ . sur $[0;1]$, f est continue et strictement croissante. De plus, pour tout $m \in]0;\frac{1}{e}[$, m est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. D'après le TH des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha_1 \in [0;1]$ tq $f(\alpha_1) = m$. (1)

. de même sur $[1;+\infty[$, il existe un unique $\alpha_2 \in [1;+\infty[$ tq $f(\alpha_2) = m$, pour tout $m \in]0;\frac{1}{e}[$ (0,5)

. pour $m = \frac{1}{4}$, $\alpha_1 \approx 0,36$ et $\alpha_2 \approx 2,15$ (0,5)