

$DM_n = 10$ .

Ex 1:  $(7,5)$

1) a)  $(1,5)$       b)  $(0,5)$

2) a)  $DM_n = \left| \left(\frac{3}{5}\right)^n (-1+i) \right| = \left(\frac{3}{5}\right)^n | -1+i | = \left(\frac{3}{5}\right)^n \sqrt{2}$  (1)

b)  $\frac{3}{5} \in ]0; 1[$  donc  $\lim \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$  et  $\lim DM_n = 0$  (0,5)

c)  $\text{Arg}(U_n) = \text{Arg}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) + \text{Arg}(-1+i) \pmod{2\pi}$   
 $= \text{Arg}(-1+i) \pmod{2\pi}$  (0,5)

Comme  $| -1+i | = \sqrt{2}$ ,  $\cos(\text{Arg}(-1+i)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\sin(\text{Arg}(-1+i)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

D'où  $\text{Arg}(U_n) = \text{Arg}(-1+i) \pmod{2\pi}$   
 $= \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$  (1,5)

Par conséquent les pts  $M_n$  appartiennent à  $[OM_0]$  privé de 0. (1)

3) a) Par translation de vecteur  $-\vec{v}$ . (0,5)

b) Les pts  $(P_n)$  sont alignés sur l'image de  $[OM_0]$  par  $t \rightarrow -t$ . (0,5)

Ex 2

1) a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  }  $\lim_{-\infty} f = -\infty$  (1)

$f(x) = x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{+\infty} f = -\infty$  (1)

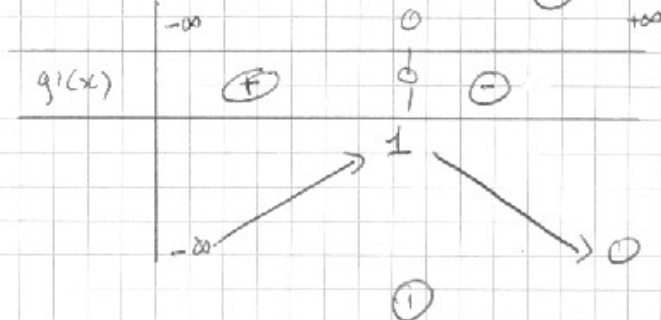
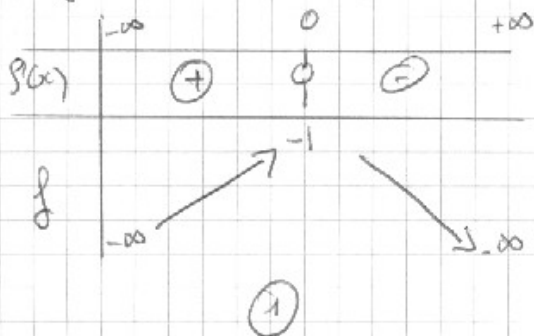
$g(x) = (1-x)e^x$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  }  $\lim_{+\infty} g = -\infty$  (0,5)

$g(x) = e^x - x e^x$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  } donc  $\lim_{-\infty} g = 0$  (1)

b)  $f(x) - x = -e^x$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = 0$  donc (D):  $y = x$  est asymptote à (C) en  $+\infty$  (1)

c)  $f'(x) = 1 - e^x$  (0,5)

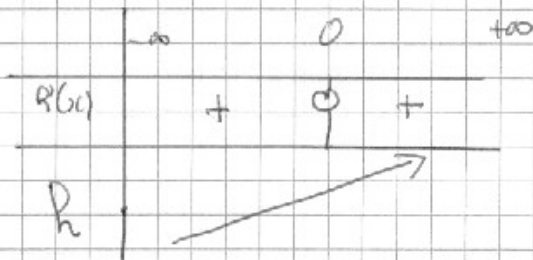
$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -x e^x$  (0,5)



(E)  $h(x) = x - e^{2x} - e^x + x e^{2x}$

a)  $h'(x) = 1 - 2e^{2x} - e^x + e^{2x} + x e^{2x}$   
 $= 1 - e^x + x e^{2x}$   
 $= 1 - (1-x)e^{2x}$   
 $= 1 - g(x)$  (1,5)

b) D'après le tableau de variations de  $g$ , on voit que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $g(x) < 1$  et  $g(0) = 1$ . Ainsi  $h'(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}^*$  et  $h(0) = 0$  (0,5)



(0,5)  $h(x) = x - e^{2x} - e^x + x e^{2x}$

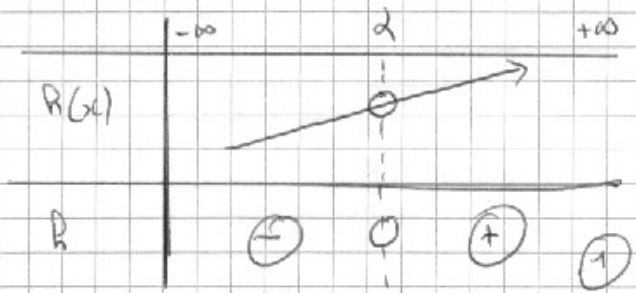
c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = 0$

$h(x) = x \left( 1 - 2 \frac{e^x}{x} + e^{2x} \right) = x \left( 1 + e^{2x} \left( -\frac{2}{x} + 1 \right) \right)$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{2x} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x} + 1 = 1$

$h$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h = +\infty$   
 $0 \in ]-\infty; +\infty[$

D'après le TH des valeurs intermédiaires, il existe un unique  $\alpha \in ]-\infty; +\infty[$  tq  $h(\alpha) = 0$  (2)

$R(1,6) < 0$   
 $R(1,7) > 0$  }  $\alpha \in ]1,6; 1,7[$  (1). Les courbes (E) et (E') se coupent à l'abscisse  $\alpha$ .



La courbe de  $f$  est en dessous de celle de  $g$  sur  $] -\infty; \alpha [$  et au dessus sur  $] \alpha; +\infty [$  (0,5)