DM n°10.

Ex 1 : 7,5

1) a) 1,5 b) 0,5

2) a) $OM_n = \left|\left(\frac{3}{5}\right)^n(-1+i)\right| = \left|\left(\frac{3}{5}\right)^n\right| \times |-1+i| = \left(\frac{3}{5}\right)^n\sqrt{2}$ 1

b) $\frac{3}{5} \in]0;1[$ donc $\lim \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ et $\lim OM_n = 0$ 0,5

c) $\text{Arg}(U_n) = \text{Arg}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) + \text{Arg}(-1+i)\ (2\pi)$

$= \text{Arg}(-1+i)\ (2\pi)$ 0,5

Comme $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\cos(\text{Arg}(-1+i)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\text{Arg}(-1+i)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'où $\text{Arg}(U_n) = \text{Arg}(-1+i)\ (2\pi)$

$= \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ 1,5

Par conséquent les pts M_n appartiennent à $[OM_0]$ privé de O. 1

3) a) Par translation de vecteur $-\vec{v}$. 0,5

b) Les pts (P_n) sont alignés sur l'image de $[OM_0]$ par $t_{-\vec{v}}$. 0,5

Ex 2

1) a) • $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ 1

• $f(x) = x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ 1

• $g(x) = (1-x)e^x$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$ 0,5

• $g(x) = e^x - xe^x$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{-\infty} g = 0$ 1

b) $f(x) - x = -e^x$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0$ donc $(\Delta) : y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ 1

c) $f'(x) = 1 - e^x$ 0,5

$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$ 0,5

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	↗	1	↘	0

1

(2) $h(x) = x - e^x - e^x + x e^x$

a) $h'(x) = 1 - e^x - e^x + e^x + x e^x$

$= 1 - e^x + x e^x$

$= 1 - (1-x) e^x$

$= 1 - g(x)$ (1,5)

b) D'après le tableau de variato de g, on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) < 1$ et $g(0) = 1$. Ainsi $h'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et $h(0) = 0$ (0,5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
h		$\nearrow$		$\nearrow$	

(0,5)

c) . $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ $\Bigg\}$ $\lim\limits_{-\infty} h = -\infty$

. $h(x) = x\left(1 - 2\dfrac{e^x}{x} + e^x\right) = x\left(1 + e^x\left(-\dfrac{2}{x} + 1\right)\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{2}{x} + 1 = 1$ $\Bigg\}$ $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$

h est continue et strict^t croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{-\infty} h = -\infty$, $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$, $0 \in]-\infty ; +\infty[$ $\Bigg\}$ D'après le Th des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]-\infty ; +\infty[$ tq $h(\alpha) = 0$ (2)

$h(1,6) < 0$, $h(1,7) > 0$ $\Big\}$ $\alpha \in]1,6 ; 1,7[$ (1). Les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se coupent à l'abscisse α.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
h		$-$	0	$+$	

(1)

La courbe de f est en dessous de celle de g sur $]-\infty ; \alpha[$ et au dessus sur $]\alpha ; +\infty[$ (0,5)