

$DM_n = 10$.

Ex 1: $(7,5)$

1) a) $(1,5)$ b) $(0,5)$

2) a) $DM_n = \left| \left(\frac{3}{5}\right)^n (-1+i) \right| = \left(\frac{3}{5}\right)^n | -1+i | = \left(\frac{3}{5}\right)^n \sqrt{2}$ (1)

b) $\frac{3}{5} \in]0; 1[$ donc $\lim \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ et $\lim DM_n = 0$ (0,5)

c) $\text{Arg}(U_n) = \text{Arg}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) + \text{Arg}(-1+i) \pmod{2\pi}$
 $= \text{Arg}(-1+i) \pmod{2\pi}$ (0,5)

Comme $| -1+i | = \sqrt{2}$, $\cos(\text{Arg}(-1+i)) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\text{Arg}(-1+i)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D'où $\text{Arg}(U_n) = \text{Arg}(-1+i) \pmod{2\pi}$
 $= \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$ (1,5)

Par conséquent les pts M_n appartiennent à $[OM_0]$ privé de 0. (1)

3) a) Par translation de vecteur $-\vec{v}$. (0,5)

b) Les pts (P_n) sont alignés sur l'image de $[OM_0]$ par $t \rightarrow -t$. (0,5)

Ex 2

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ } $\lim_{-\infty} f = -\infty$ (1)

$f(x) = x \left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} f = -\infty$ (1)

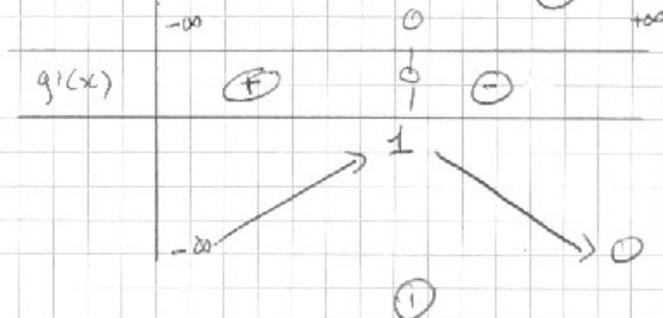
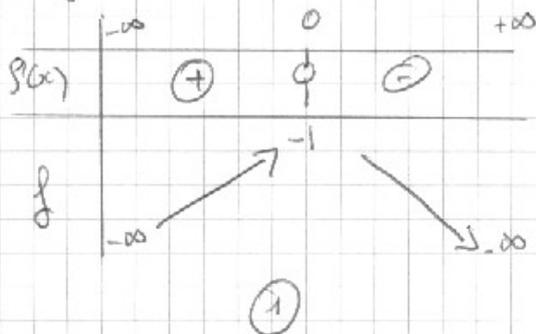
$g(x) = (1-x)e^x$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ } $\lim_{+\infty} g = -\infty$ (0,5)

$g(x) = e^x - x e^x$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ } donc $\lim_{-\infty} g = 0$ (1)

b) $f(x) - x = -e^x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = 0$ donc (D): $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$ (1)

c) $f'(x) = 1 - e^x$ (0,5)

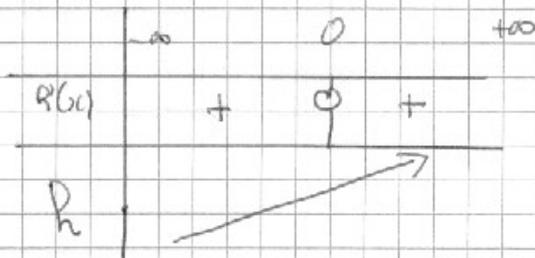
$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -x e^x$ (0,5)



(E) $h(x) = x - e^{2x} - e^x + x e^{2x}$

a) $h'(x) = 1 - 2e^{2x} - e^x + e^{2x} + x e^{2x}$
 $= 1 - e^x + x e^{2x}$
 $= 1 - (1-x)e^x$
 $= 1 - g(x)$ (1,5)

b) D'après le tableau de variations de g , on voit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) < 1$ et $g(0) = 1$. Ainsi $h'(x) > 0$ sur \mathbb{R}^* et $h(0) = 0$ (0,5)



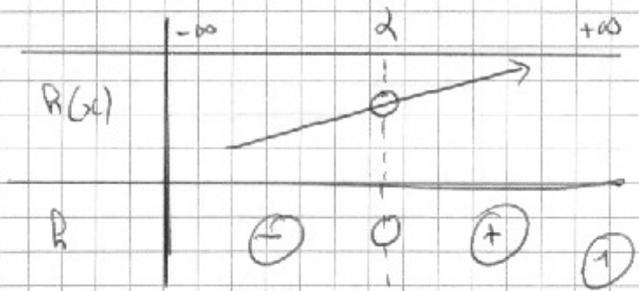
(0,5) $h(x) = x - e^{2x} - e^x + x e^{2x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{2x} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

$h(x) = x \left(1 - 2 \frac{e^x}{x} + e^x \right) = x \left(1 + e^x \left(-\frac{2}{x} + 1 \right) \right)$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2}{x} + 1 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

h est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$
 $0 \in]-\infty; +\infty[$
 D'après le TH des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]-\infty; +\infty[$ tq $h(\alpha) = 0$ (2)

$R(1,6) < 0$
 $R(1,7) > 0$
 $\alpha \in]1,6; 1,7[$ (1). Les courbes (E) et (E') se coupent à l'abscisse α .



La courbe de f est en dessous de celle de g sur $] -\infty; \alpha [$ et au dessus sur $] \alpha; +\infty [$ (0,5)