DS TS No 3

Ex 1 : Pas si complexe.

Partie I

1. Soit (E) l'équation $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$ dans $\mathbb{C}$.
   a. Démontrez que -i est solution de (E).
   b. En déduire les réels a,b et c tels que $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$
   c. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Partie II

On appelle A,B,C,S et Ω les points d'affixes respectives 4+i,4-i,-i,1+2i et 2 dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ orthonormé qu'on complétera au fur et à mesure.

1. Démontrez que A,B,C et S sont sur un même cercle ($\mathcal{C}$) dont on déterminera le centre et le rayon.
2. A tout point M(z), on associe le point M'(z') tel que $z'=\dfrac{iz+10-2i}{z-2}$.
   a. Déterminez les affixes de A',B',C' associés respectivement à A,B et C.
   b. Soit P(i).Vérifiez que A',B' et C' sont sur un cercle ($\mathcal{C}'$) de centre P dont on déterminera le rayon.
3. a. Pour tout complexe $z\neq 2$, démontrez que $|z'-i|=\dfrac{10}{|z-2|}$.
   b. Soit M(z) un point du cercle ($\mathcal{C}$) . Démontrez que $|z'-i|=2\sqrt{5}$.
   c. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés au point M du cercle ($\mathcal{C}$) .

Ex 2 : Fonction.

Soit f la fonction définie sur D=]0;1[U]1;+oo[par $f(x)=\dfrac{x^4-3x^2-4}{x^3-x}$.

1. a. Déterminez les réels a,b,c et d tels que $f(x)=ax+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x+1}+\dfrac{d}{x-1}$.
   b. En déduire l' équation de l' asymptote à la courbe (C_f) en +oo et -oo.
2. Déterminez les limites de f aux bornes de D.
3. a) Déterminez f'.
   b) Soit $g(x)=x^6+15x^2-4.$ Etudiez les variations de g sur [O;+oo[. En déduire que g(x)=0 admet une unique solution $\alpha\in[0,51;0,52]$. En déduire le tableau de signes de g sur D.
   c) En déduire un tableau de signes de f' sur D puis les variations de f sur D.