

DM No 4

Ex 1 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+n-1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n=4u_n-6n+15$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrez que (v_n) est géométrique.
2. Exprimez u_n en fonction de v_n et en déduire que $u_n=\frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire (t_n) , arithmétique, et (w_n) , géométrique, telles que $u_n=t_n+w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$.

Ex 2 :

Partie A

Soit $\varphi(x)=\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

1. Déterminez a et b tels que la courbe représentative de φ soit tangente en I(0;3) à (T) : $y=4x+3$.

Partie B

Soit $f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé (on prendra 2cm en unité).

1. Déterminez α et β tels que $f(x)=\alpha+\frac{\beta x}{x^2+1}$.
2. Étudiez f.
3. Étudiez la position relative de (C) et (T).
4. Construisez (C).
5. Soit $g(x)=\frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$ de courbe représentative (C'). Expliquez comment déduire (C') de (C) et tracez (C').

Ex 3 :

Dans \mathbb{C} , soit (E) l'équation: $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$

1. Montrez que -i est solution de (E).
2. Déterminez a, b et c trois réels tels que $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(az^2+bz+c)$.
3. Résoudre (E) dans \mathbb{C} .