DM no 5

Ex 1 : Suites et Barycentres.

Soit (D) une droite munie d'un repère $(O;\vec{i})$. A_0 et B_0 sont les points d'abscisses -4 et 3 de cette droite. Pour tout $n\in N$, on note :

- A_{n+1} le barycentre de {(A_n ;1),(B_n ;4)}
- B_{n+1} le barycentre de {(A_n ;3),(B_n ;2)}

1. Placez A_0 , A_1 , B_0 et B_1 .
2. On pose a_n l'abscisse de A_n et b_n celle de B_n pour tout $n\in N$. Démontrez que, pour tout $n\in N$, $a_{n+1}=\frac{1}{5}(a_n+4b_n)$ et $b_{n+1}=\frac{1}{5}(3\ a_n+2\ b_n)$.
3. a. Démontrez par récurrence que $3\ a_n+4\ b_n=0$ pour tout $n\in N$.
   b. En déduire que $a_{n+1}=\frac{-2}{5}a_n$ et $b_{n+1}=\frac{-2}{5}b_{n.}$
4. a. Exprimez a_n et b_n en fonction de n.
   b. Etudiez la convergence de a_n et b_n lorsque n tend vers +oo.
   c. Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n .

Ex 2 :

Soit $f(x)=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2x}$.

1. Déterminez le domaine de définition et de dérivation de f.
2. Etudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Etudiez les variations de f sur ensemble de définition.
4. Démontrez que f admet une asymptote oblique à déterminer.

Ex 3 :

Soit S_n la somme des cubes de n permiers nombres impaires : $S_n=1^3+3^3+5^3+...+(2n-1)^3$

Par exemple $S_3=1^3+3^3+5^3$, $S_5=1^3+3^3+5^3+7^3+9^3$.

1. Démontrez par récurrence que $S_n=2\ n^4-n^2$ pour tout $n\in N\ ^*$.
2. Déterminez n tel que $S_n=913276$.

On donne :

- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a+b)^4=a^4+4a^3\ b+6a^2\ b^2+4ab^3+b^4$