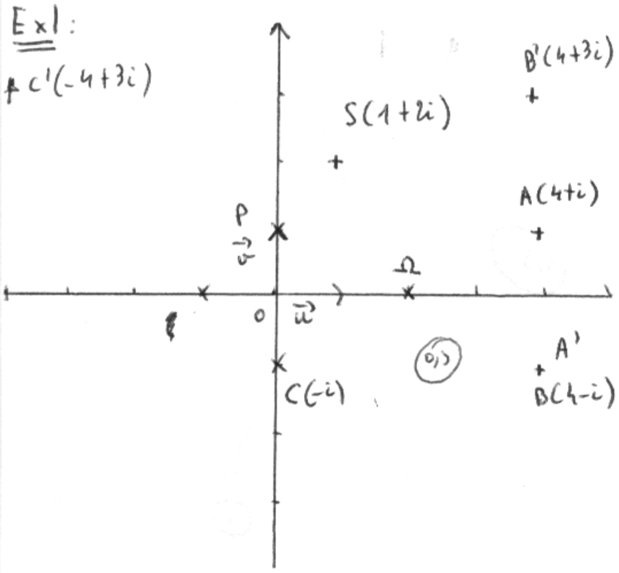
DS TS n°3

Ex1 :



Partie I.

1 a) $(-i)^3+(-8+i)(-i)^2+(17-8i)\times(-i)+17i$

$=+i+8-i-17i-8+17i$

$=0 \Rightarrow$ on peut factoriser le polynôme par $(z+i)$ (1)

b) $(z+i)(az^2+bz+c)$

$=az^3+bz^2+cz+iaz^2+ibz+ic$

$=az^3+(b+ia)z^2+(c+ib)z+ic$

$\begin{cases} a=1 \\ c=17 \\ b+i=-8+i \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \end{cases}$ $p(z)=(z+i)(z^2-8z+17)$ (1,5)

c) $z_1=-i$ ou $\Delta=-4$

$z_1=\frac{8+i\sqrt{4}}{2}=4+i$

$z_2=\frac{8-i\sqrt{4}}{2}=4-i$

$\mathcal{S}=\{-i;4+i;4-i\}$ 1

Partie II

1. $\Omega A=|2+i|=\sqrt{3}$, $\Omega S=|-1+2i|=\sqrt{5}$, $\Omega C=|2+i|=\sqrt{5}$, $\Omega B=|2-i|=\sqrt{5}$ } A, B, C, S sont sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$. (1)

2. a) $z_{A'}=\frac{4i-1+10-2i}{2+i}=\frac{(2i+9)(2-i)}{5}=\frac{20-5i}{5}=4-i$ (1,5)

$z_{B'}=\frac{4i+1+10-2i}{2-i}=\frac{(2i+11)(2+i)}{5}=\frac{20+15i}{5}=4+3i$

$z_{C'}=\frac{1+10-2i}{-i-2}=\frac{(2i+11)(-2+i)}{5}=\frac{-20+15i}{5}=-4+3i$

b) $A'P=|4-2i|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $B'P=|4+2i|=2\sqrt{5}$, $C'P=|-4+2i|=2\sqrt{5}$ } A', B' et C' sont sur le cercle de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$. (1)

3. $|z'-i|=\left|\frac{iz+10-2i-iz+2i}{z-2}\right|=\left|\frac{10}{z-2}\right|=\frac{10}{|z-2|}$ (1,5)

4) $M(z)\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow |z-2|=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{10}{|z-2|}=\frac{10}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |z'-i|=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$ (1)

5) $M(z)\in(\mathcal{C}) \Leftrightarrow |z'-i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow M'P=2\sqrt{5} \Leftrightarrow M'\in(\mathcal{C}')$ (1)

/10

Ex2.

1 a) $ax+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}+\frac{d}{x-1}=\frac{ax^4-ax^2+bx^2-b+cx^2-cx+dx^2+dx}{x^3-x}$

$=\frac{ax^4+(-a+b+c+d)x^2+(-c+d)x-b}{x^3-x}$

$\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ -1+4+c+d=-3 \\ -c+d=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c+d=-6 \\ c=d \end{cases}$ $\begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=d=-3 \end{cases}$ (1,5)

b) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x}-\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}=0$

donc (d) : $y=1x$ est asymptote à la courbe de f en $\pm\infty$ (1)

2) • $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{4}{x} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{-3}{x+1}-\frac{3}{x-1}=-6 \end{array}\right\}$ $\lim_{0^+} f = +\infty$ (1)

• $\lim_{x\to 1} x+\frac{4}{x}-\frac{3}{x+1}=1+4-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

→ $\lim_{x\to 1^-} x-1=0^-$ donc $\lim_{x\to 1^-}\frac{-3}{x-1}=+\infty$ donc $\lim_{1^-} f=+\infty$ (1,5)

→ $\lim_{x\to 1^+} x-1=0^+$ donc $\lim_{x\to 1^+}\frac{-3}{x-1}=-\infty$ donc $\lim_{1^+} f=-\infty$

• $\lim_{+\infty} f=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{x^3}=+\infty$ 0,5

3) a) $f'(x)=\frac{(4x^3-6x)(x^3-x)-(3x^2-1)(x^4-3x^2-4)}{(x^3-x)^2}=\frac{x^6+15x^2-4}{(x^3-x)^2}$ (1,5)

b) $g(x)=x^6+15x^2-4$ donc $g'(x)=6x^5+30x=x(\underbrace{6x^4+30}_{+})$ (0,5)

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	-4	↗ 0 ↗	$+\infty$

(1)

sur $[0;+\infty[$, g est continue et strictement monotone.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{+\infty} g=+\infty \\ g(0)=-4 \\ 0\in[-4;+\infty[\end{array}\right\}$ D'après le Th des valeurs intermédiaires, $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$ (1,5)

$\left.\begin{array}{l} g(0,51)\simeq -0,08 \\ g(0,52)\simeq 0,08 \end{array}\right\}$ $\alpha\in[0,51;0,52]$ (0,5)