

DM n°6

Ex1: a) Soit  $A(-1-2i)$ .

$|\bar{z}+1+2i|=2 \Leftrightarrow AM=2 \Leftrightarrow$  Le lieu de  $M$  est le cercle de centre  $A$  et de rayon 2

b) Soit  $C(3i)$  et  $D(4)$

3x2)  $|\bar{z}-3i|=|\bar{z}-4| \Leftrightarrow MC=MD \Leftrightarrow$  Le lieu de  $M$  est la médiatrice de  $[CD]$

c) Soit  $E(1)$ .

$|\bar{z}-2+i|=1 \Leftrightarrow |\bar{z}-1|=1 \Leftrightarrow ME=1 \Leftrightarrow$  Le lieu de  $M$  est le cercle de centre  $E$  et de rayon 1

Ex2:

$$\textcircled{1} z^3 + 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \quad \Delta = 64 \times 3 - 4 \times 64 = -64 \rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-8\sqrt{3} + 8i}{2} = -4\sqrt{3} + 4i \\ z_2 = -4\sqrt{3} - 4i \end{cases} \textcircled{1}$$

$$\textcircled{2} OA = |-4\sqrt{3} - 4i| = \sqrt{64} = 8$$

$$OB = |-4\sqrt{3} + 4i| = 8$$

$$AB = |-4\sqrt{3} + 4i + 4\sqrt{3} + 4i| = |8i| = 8 \quad \text{donc } OA = OB = AB \text{ et } OAB \text{ est équilatéral} \textcircled{1}$$

$$\textcircled{3} \text{ a) Pour tout } M, \vec{MG} = -\frac{1}{2}\vec{MO} + \frac{1}{2}\vec{MD} + \frac{1}{2}\vec{MB}$$

$$\text{Pour } M=O, \vec{OG} = \vec{OB} + \vec{OB} \quad \text{donc } g = 2i + (-4\sqrt{3} + 4i) = -4\sqrt{3} + 6i \textcircled{1}$$

$$\text{c) } \vec{OB}(-4\sqrt{3} + 4i)$$

$$\vec{OG}(-4\sqrt{3} + 6i - 2i) \quad \text{donc } \vec{DG}(-4\sqrt{3} + 4i) \quad \left. \begin{array}{l} \vec{OB} = \vec{DG} \\ \vec{OB} = \vec{OG} \end{array} \right\} \text{ donc } OBDG \text{ est un parallélogramme.} \textcircled{1}$$

Ex3:

a)  $x^2 + x - 2$  s'annule en 1 et en -2, donc  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1; -2\}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{de m\^e, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \textcircled{1}$$

• Par division euclidienne ou identification, on montre que  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)^2(x+2)$   $\textcircled{1}$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+1)^2}{x-1} = -\frac{1}{3} \textcircled{1}$$

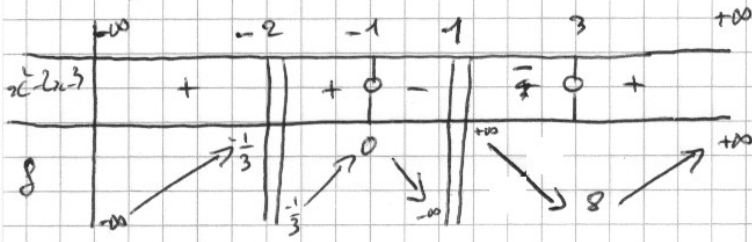
$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} f = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+1)^2}{x-1} = -\frac{1}{3} \textcircled{1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 12$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x - 2 = 0^- \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f = -\infty \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+ \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f = +\infty \textcircled{1}$$

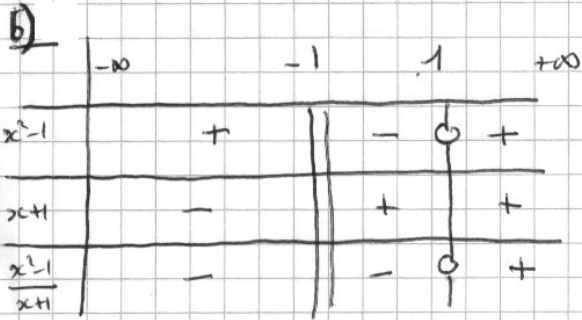
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} \quad (1)$$



$$f(-1) = 0$$

$$f(3) = 8$$

(1)



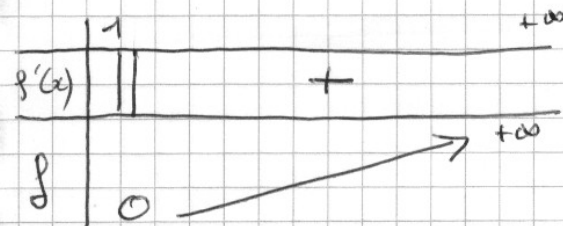
$$\Rightarrow D_f = [-1; +\infty[ \text{ dérivable sur } ]1; +\infty[$$

(1, 5)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \rightarrow +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$f'(x) = \left( \frac{x^2-1}{x+1} \right)' \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}}} = 1 \times \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \quad (1)$$



$$f(1) = 0$$

(1)