DM n°6

Ex1 : a) Soit $A(-1-2i)$.

$|z+1+2i| = 2 \Leftrightarrow AM = 2 \Leftrightarrow$ Le lieu de M est le cercle de centre A et de rayon 2

b) Soit $C(3i)$ et $D(4)$

(3×2,5) $|z-3i| = |z-4| \Leftrightarrow MC = MD \Leftrightarrow$ Le lieu de M est la médiatrice de [CD]

c) Soit $E(1)$.

$|\bar{z}-2+1| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = 1 \Leftrightarrow ME = 1 \Leftrightarrow$ Le lieu de M est le cercle de centre E et de rayon 1

Ex2 :

① $z^2 + 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \qquad \Delta = 64\times3 - 4\times64 = -64 \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-8\sqrt{3}+8i}{2} = -4\sqrt{3}+4i \\ z_2 = -4\sqrt{3}-4i \end{cases}$ (1)

② $OA = |-4\sqrt{3}-4i| = \sqrt{64} = 8$

$OB = |-4\sqrt{3}+4i| = 8$

$AB = |-4\sqrt{3}+4i+4\sqrt{3}+4i| = |8i| = 64$ donc $OA = OB = AB$ et OAB est équilatéral (1)

③ a) Pour tout M, $\vec{MG} = -\frac{1}{1}\vec{MO} + \frac{1}{1}\vec{MD} + \frac{1}{1}\vec{MB}$

Pour $M = O$, $\vec{OG} = \vec{OD} + \vec{OB}$ donc $g = 2i + (-4\sqrt{3}+4i) = -4\sqrt{3}+6i$ (1)

c) $\vec{OB}(-4\sqrt{3}+4i)$

$\vec{DG}(-4\sqrt{3}+6i-2i)$ donc $\vec{DG}(-4\sqrt{3}+4i)$ $\Big\}$ $\vec{OB} = \vec{DG}$ donc OBGD est un parallélogramme. (1)

Ex3 :

a) x^2+x-2 s'annule en 1 et en -2, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}-\{1;-2\}$ (1)

- $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ de m, $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ (1)

- Par division euclidienne ou identification, on montre que $x^3+4x^2+5x+2 = (x+1)^2(x+2)$ (1)

$\rightarrow \lim\limits_{-2^-} f = \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{(x+1)^2}{x-1} = -\dfrac{1}{3}$ (1)

$\rightarrow \lim\limits_{-2^+} f = \lim\limits_{-2^+} \dfrac{(x+1)^2}{x-1} = -\dfrac{1}{3}$ (1)

- $\lim\limits_{x\to1} x^3+4x^2+5x+2 = 12$

$\rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} x^2+x-2 = 0^-$ donc $\lim\limits_{1^-} f = -\infty$ (1,5)

$\lim\limits_{x\to1^+} x^2+x-2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{1^+} f = +\infty$ (2,5)

- $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ (1)

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{3}$ $\Vert$ $-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

$f(-1) = 0$

$f(3) = 8$ (1)

b)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$\frac{x^2-1}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow D_f = [1 ; +\infty[$ dérivable sur $]1 ; +\infty[$ (1,5)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

- $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)' \times \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x+1}}} = 1 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ (1)

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 0$ (1)