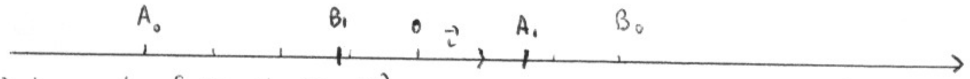
DM n°5

I ① A_1 bary de $\{(A_0;1);(B_0;4)\}$
Pour tout M, $\overrightarrow{MA_1} = \frac{1}{5}\overrightarrow{MA_0} + \frac{4}{5}\overrightarrow{MB_0}$
Pour $M = B_0$, $\overrightarrow{B_0A_1} = \frac{1}{5}\overrightarrow{B_0A_0}$

B_1 bary de $\{(A_0;3);(B_0;2)\}$
Pour tout M, $\overrightarrow{MB_1} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MA_0} + \frac{2}{5}\overrightarrow{MB_0}$
Pour $M = B_0$; $\overrightarrow{B_0B_1} = \frac{3}{5}\overrightarrow{B_0A_0}$



1

② $A_{n+1}(a_n)$ bary de $\{(A_n;1);(B_n;4)\}$
Pour tout M, $\overrightarrow{MA_{n+1}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{MA_n} + \frac{4}{5}\overrightarrow{MB_n}$
Pour $M = O$, $\overrightarrow{OA_{n+1}} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OA_n} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OB_n}$

donc $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$ 2

$B_{n+1}(b_{n+1})$ bary de $\{(A_n;3);(B_n;2)\}$
Pour tout M, $\overrightarrow{MB_{n+1}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{MA_n} + \frac{2}{5}\overrightarrow{MB_n}$
Pour $M = O$, $\overrightarrow{OB_{n+1}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA_n} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB_n}$

donc $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

3) a) * $3a_0 + 4b_0 = 3\times -4 + 3\times 3 = 0$: la propriété est vraie pour $n=0$

* supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tq : $3a_n + 4b_n = 0$

$$3a_{n+1} + 4b_{n+1} = \frac{3}{5}(a_n + 4b_n) + \frac{4}{5}(3a_n + 2b_n)$$
$$= \frac{1}{5}(3a_n + 12b_n + 12a_n + 8b_n)$$
$$= \frac{1}{5}(15a_n + 20b_n)$$
$$= 3a_n + 4b_n$$
$$= 0$$
: la propriété devient vraie au rang $n+1$. 2

* Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3a_n + 4b_n = 0$

b). Nous savons que $3a_n + 4b_n = 0$ donc : $a_n = -\frac{4}{3}b_n$ et $b_n = -\frac{3}{4}a_n$.

. $a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n) = \frac{1}{5}(a_n - 3a_n) = -\frac{2}{5}a_n$ 2

. $b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) = \frac{1}{5}(-4b_n + 2b_n) = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) (a_n) et (b_n) sont des suites géométriques de raison $-\frac{2}{5}$ donc 1

$a_n = \left(-\frac{2}{5}\right)^n a_0 = - \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^n$ et $b_n = \left(-\frac{2}{5}\right)^n b_0 = \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^n$

b) $-\frac{2}{5} \in]-1;1[$ donc $\lim a_n = \lim b_n = 0$ 1

c) les points A_n et B_n tendent vers l'origine O lorsque n tend vers $+\infty$. 1

Ex2 :

① $D_f = \mathbb{R}^*$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$

② . $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$
. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{3}} = +\infty$
$\Bigg\}$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ 1

. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{3}}{2x} = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{3}} = -\infty$
$\Bigg\}$ $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ 1

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x}{\sqrt{3}} = 0^-$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{3}}{2x} = -\infty$ $\Big\}$ $\lim\limits_{0^-} f = -\infty$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{3}} = 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3}}{2x} = +\infty$ $\Big\}$ $\lim\limits_{0^+} f = +\infty$ (1)

3) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2x^2} = \frac{2x^2-3}{2x^2\sqrt{3}}$ (1)

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$ (1)

4) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2x} + \frac{x}{\sqrt{3}}$

$f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2x}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - \frac{x}{\sqrt{3}} = 0$ donc la droite (d) : $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ est asymptote oblique en $+\infty$. (1)

Ex3

1. * $S_1 = 1^3 = 1$, $2\times 1^4 - 1^2 = 1$ $\Big\}$ la propriété est vraie au rang $n = 1$

* Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $S_n = 2n^4 - n^2$

$2(n+1)^4 - (n+1)^2$
$= 2(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - n^2 - 2n - 1$
$= 2n^4 + 8n^3 + 12n^2 + 8n + 2 - n^2 - 2n - 1$
$= \underline{2n^4 - n^2} + \underline{8n^3 + 12n^2 + 6n + 1}$
$= S_n + (2n+1)^3$
$= S_n + (2(n+1)-1)^3$
$= S_{n+1}$: la propriété devient vraie au rang $n+1$ (2)

* Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 2n^4 - n^2$.

2. $2n^4 - n^2 - 913276 = 0$ avec $n > 0$

Posons $N = n^2$: on cherche $2N^2 - N - 913276 = 0$

$\Delta = 7306209 \Rightarrow N_1 = \frac{1+2703}{4} = 676$

$N_2 = \frac{1-2703}{4} = -\frac{1351}{2} \Rightarrow$ Impossible car $N > 0$

Ainsi, comme $n > 0$, $n = \sqrt{676} = 26$. (2)