DM n°1 TS

I ① $f(x)=\sqrt{x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h} \times \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ ①

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

② Procédons par récurrence :

- Comme au ①, on démontre que $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ ① pour $x \in \mathbb{R}^*$: la propos vraie à n=1
- $\left(\frac{1}{x^{n}}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}}$ est maintenant supposée vérifiée pour un entier n donné.

$$\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' \times \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^n} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-n}{x^{n+2}} - \frac{1}{x^{n+2}} = \frac{-(n+1)}{x^{(n+1)+1}}$$

la propriété devient alors vraie au rang suivant ①

- Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-1}{x^{n+1}}$. ①

II/ a) le dénominateur s'annule en -1 et 3 donc $Df = \mathbb{R} - \{-1;3\}$ et f est (0,5) dérivable sur Df.

$$f'(x) = \frac{(-2x-1)(2x^2-4x-6)-(4x-4)(-x^2-x+2)}{(2x^2-4x-6)^2} = \frac{6x^2+4x+14}{(2x^2-4x-6)^2}$$ ①

b) $Df = \mathbb{R}^+$, f dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ 0,5

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$ ①

c) $Df = \mathbb{R}$, f dérivable sur $\mathbb{R}$. 0,5

$$f'(x) = 10 \times (\cos(x))' \times \cos^9(x) + (3x^2)'\cos(3x^2-1) = -10\sin x \cos^9(x) + 6x\cos(3x^2-1)$$ ①

d) $Df = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ dérivable sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$. 0,5

$$f'(x) = 2\sqrt{3-2x} + \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}(2x+3)$$

$$= \frac{2(3-2x) - 2x - 3}{\sqrt{3-2x}}$$

$$= \frac{-6x+3}{\sqrt{3-2x}}$$ ①

Ex3 :

① $f'(x) = \dfrac{(6x+4)(x^2+1) - 2x(3x^2+4x+3)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ (1)

x	-4		-1		1		4
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{35}{17}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{67}{17}$

$f(-4) = \dfrac{35}{17}$

$f(-1) = 1$

$f(1) = 5$ (2)

$f(4) = \dfrac{67}{17}$

② $\alpha + \dfrac{\beta x}{x^2+1} = \dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \alpha}{x^2+1}$.

Pour avoir l'égalité avec $\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ il suffit de prendre $\alpha = 3$ et $\beta = 4$. (1)

③ $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 4x + 3$ (1)

④ $f(x) - (4x+3) = \dfrac{4x}{x^2+1} - 4x = 4x\left(\dfrac{1}{x^2+1} - 1\right)$ (1)

Comme $\dfrac{1}{x^2+1} - 1 \leq 0$ on a le tableau ci-dessous :

x	-4		0		4
$4x$		$-$	0	$+$	
$\frac{1}{x^2+1}-1$		$-$		$-$	
$f(x)-(4x+3)$		$+$	0	$-$	

(1)

La courbe de f est au dessus de (T) sur $[-4;0[$ et en dessous sur $]0;4]$ (1)

⑤ (2)