DS TS No 7

Ex 1 : Soit (U_n) définie sur N* par $U_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. a. Etudiez les variations de $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ Sur R⁺*.

   b. En déduire le sens de variation ainsi que la limité de (U_n) puis que , pour tout entier naturel n non nul, on a $0 < U_n \leqslant 1$.

2. On pose , pour tout entier naturel n non nul, $X_n = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_n$.

   a. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $X_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

   b. Déterminez la limite de (X_n) .

3. On pose $V_n = \ln(U_n)$ pour tout entier naturel n non nul.

   a. Déduire du 1.b. que (V_n) est définie et négative (...donc majorée par 0...)

   b. Justifiez que $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ et en déduire que (V_n) est croissante. (lna -ln b =...)

   c. En déduire que (V_n) converge vers un réel l et déterminez l.

4. On pose , pour tout entier naturel n non nul, $Y_n = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n$.

   a. Exprimez Y_n en fonction de X_n .

   b. Déterminez la limite de (Y_n) .

Ex 2 : On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. A(-2;3;5) et B(4;-1;3). Déterminez une équation cartésienne du plan *(P)* médiateur de [AB].
2. Soit C(1;3;1). En calculant $\vec{AB} . \vec{AC}$ de 2 façons différentes, déterminez $B\hat{A}C$ à 0,1 près.
3. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (ABC).

   a. En utilisant 2 produits scalaires nuls, trouvez un système de deux équations d'inconnues a,b et c.

   b. En fixant une valeur pour a, déterminez un vecteur normal à (ABC).

   c. *(P)* et (ABC) sont-ils parallèles ? Justifiez.

Ex 3 : Intersections de sphères

Soit (*P*) un plan , un cercle (*C*) de ce plan et de diamètre [AB]. Soit $M \in (C)$. Soit la perpendiculaire (*D*) à (*P*) passant par A et C un point de (*D*)

1. Justifiez que $\vec{MA} . \vec{MB} = 0$.
2. Démontrez que $\vec{CM} . \vec{MB} = 0$.
3. En déduire la nature de MBC.
4. (**)En déduire l'intersection des sphères de diamètres respectif [AB] et [BC].