DS TS No 4

Ex 1 : Complexes

Soit $z_1 = -2-2\mathrm{i}\ et\ z_2 = \sqrt{3} - i$

1. Ecrivez z_1 et z_2 sous la forme $k\,e^{i\theta}$ en précisant k et θ .
2. Placez précisément $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Expliquez.
3. En déduire le module et l'argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{-7\pi}{12}\ et \sin\frac{-7\pi}{12}$.

Ex 2 : Bric à Brac.

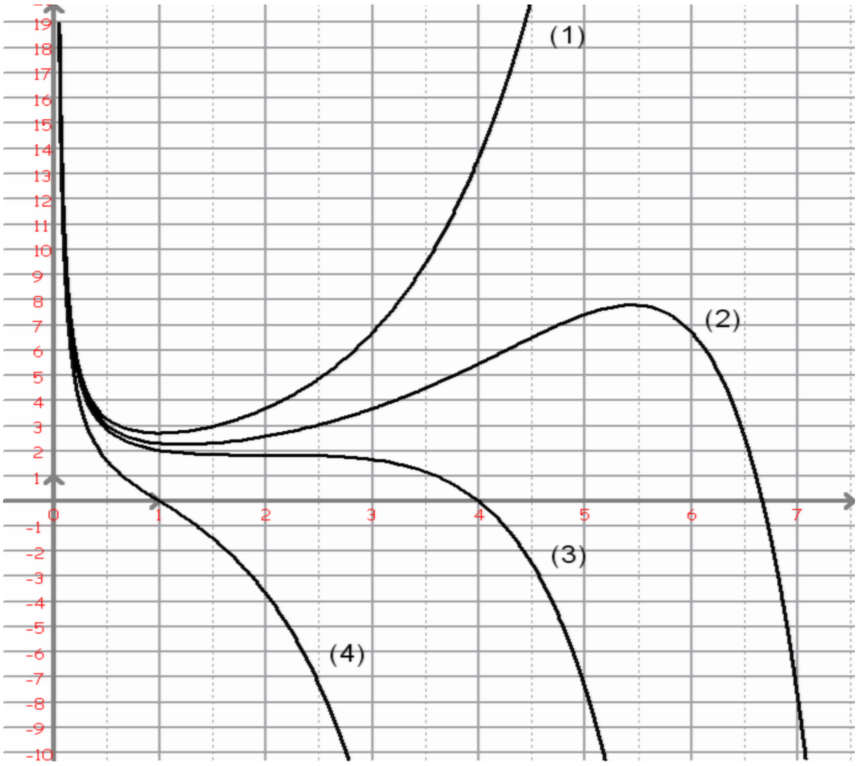
Les questions sont indépendantes.

1. On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Déterminez et tracez dans chaque cas le lieu des points M(z) tels que :
   a. $|z-2\mathrm{i}| = |z+3|$
   b. Arg(z-i)= $\frac{\pi}{6}(2\pi)$.
2. Soit p(z)= $z^3 + z - 2$.
   a. Déterminez a,b et c, trois réels tels que p(z)=(z-1)(az^2+bz+c).
   b. En déduire les solutions de p(z)=0 dans C.

Ex 3 : Problème

On considère l'équation différentielle (E) : y-y'= $\frac{e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble de ses solutions définies sur]0;+oo[.

1. a. Démontrez que la fonction u définie sur]0;+oo[par u(x)= $\frac{e^x}{x}$ vérifie (E).
   b. Démontrez qu'une fonction v définie sur]0;+oo[est solution de (E) si et seulement si v-u, définie sur]0;+oo[, est solution de (E') : y-y'=0.
   c. En déduire toutes les solutions définies sur]0;+oo[de (E) sont de la fome
   $f_k(x) = \frac{kx+1}{x}e^x$.
   d. Que faudrait-il connaître pour fixer k ?
2. Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes de f_0,f_{-1}, $f_{-0,25}$ et $f_{-0,15}$. Reconnaissez chaque courbe. Justifiez.



3. On pose maintenant k=-1.
   a. Déterminez les limites de f_{-1} en 0 et +oo.
   b. Déterminez $f'_{-1}(x)$ sur]0;+oo[.
   c. En déduire les variation de $f_{-1}(x)$ sur]0;+oo[.

Ex 4 : ROC

En utilisant une suite (Un) à déterminer, démontrez que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.