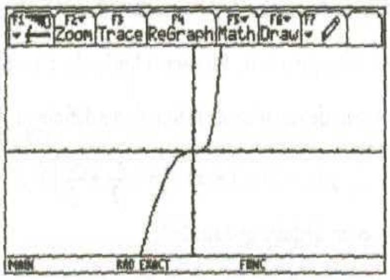
DM Ts No 7

Soit la fonction numérique f définie sur R

par : $f(x) = x^2e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$.

Conjectures

Le graphique ci-après est la courbe *(C)* représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant :

1. Le sens de variation de / sur [- 3 ; 2] ?
2. La position de la courbe par rapport à l'axe *(x'x)* ?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A - Première conjecture

1. Calculer *f'(x)* pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression *g(x)* où *g* est la fonction définie sur R par: $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2. **Étude du signe de *g(x)* pour x réel**

a. Calculer les limites de *g(x)* quand x tend vers +oo puis quand x tend vers –oo.

b. Calculer *g'(x)* et étudier son signe suivant les valeurs de *x*.

c. En déduire le sens de variation de la fonction *g*, puis dresser son tableau de variation.

d. Montrer que l'équation *g* (x) = 0 possède une unique solution dans R. On note **α** cette solution. Montrer que 0,20 <**α**< 0,21.

e. Déterminer le signe de *g(x)* suivant les valeurs de x.

3. Sens de variation de la fonction f sur R.

a. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de f'(x).

b. En déduire le sens de variation de la fonction f.

c. Que pensez-vous de votre première conjecture ?

Partie B - Deuxième conjecture

On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe *(x'x)*.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

2. On considère la fonction *h* définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

a. Calculer *h'(x)* pour x∈ [0;1], puis déterminer le sens de variation de *h* sur [0 ; 1].

b. En déduire un encadrement de f(α).

3.a. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe *(C)* avec l'axe *(x'x)*.

b. Préciser alors la position de la courbe *(C)* par rapport à l'axe des abscisses.

c. Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Partie C - Tracé de la courbe

Compte tenu des résultats précédents, on se propose de tracer la partie *(F)* de *(C)* correspondant à l'intervalle [-0,2 ; 0,4], dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec les unités suivantes :

Sur l'axe *(x'x)*, 1 cm représentera 0,05.

Sur l'axe *(y'y)*, 1 cm représentera 0,001.

1. Dresser un tableau de valeur de f entre -0,20 et 0,40 tous les 0,05 en indiquant les valeurs approchées sous la forme $n.10^{-4}$ (*n* entier relatif).

2. Tracer alors *(F)* dans le repère choisi.

Par Mieszczak Christophe http://mathatoto.chez-alice.fr/