Dm TS No 6

Ex 1 :

Soit (Un) la suite définie pour n∈N par $U_{n+1}=\frac{2U_n+3}{U_n+4}$ et $U_0=0$. On admet que, pour n∈N*, 0<Un<1.

1. Démontrez que (Un) est croissante.
2. Soit (Vn) la suite définie pour n∈N par $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+3}$.
   a. Démontrez que (Vn) est géométrique. Précisez la raison et le premier terme.
   b. En déduire le comportement à l'infini de (Vn).
3. Exprimez U_n en fonction de V_n et en déduire le comportement à l'infini de (Un).

Ex 2 :

Soit f(x)=tan(x).

1. Déterminez le domaine de définition et de dérivation de f.
2. Déterminez la parité et la périodicité de f. Expliquez pourquoi on étudiera f sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.
3. Déterminez la limite de f en $\frac{\pi}{2}^-$.
4. Démontrez que $f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$.
5. Etudiez les variation de f sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.
6. Déterminez l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
7. Dans un repère orthonormé, tracez la courbe représentative de f sur $\left]-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$.

Ex 3 : les questions sont indépendantes

1. Exprimez $\left(e^{-x}\right)^3;\frac{1}{e^{2x}};e\times e^x,\sqrt{e^{-2x}}$ en fonction de e^x.
2. Démontrez que $f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}$ est impaire.
3. Démontrez que $\lim\limits_{x\mapsto 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.