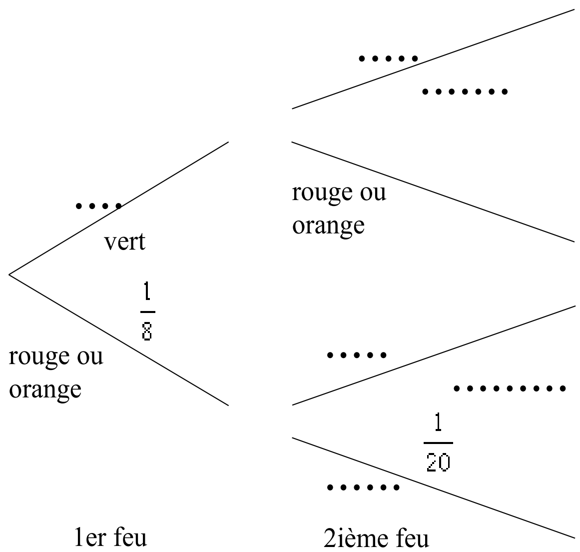
DM TS no 11

Ex 1 : Probabilités

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note E_n l'événement : «Amélie est arrêtée par le n$^{\text{ième}}$ feu rouge ou orange » et $\overline{E}_n$ l'événement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{E}_n$ .La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$. On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le (n+1)$^{\text{ième}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n$^{\text{ième}}$ feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- la probabilité que le (n+1)$^{\text{ième}}$ feu tricolore soit rouge ou orange, si le n$^{\text{ième}}$ feu est vert, vaut $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessus.



a. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{E_n}(E_{n+1})$ et $p_{\overline{E}_n}(E_{n+1})$.

b. En remarquant que $E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \overline{E}_n)$, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n .$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) des nombres réels définis pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n, en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n quand n tend vers l'infini. Donner une interprétation de ce résultat.

Ex 2 : logarithme

Soit f(x)= $\frac{1+2\ln x}{x^2}$ définie sur]0;+oo[et de courbe *C*. Soit h(x)= $\frac{1}{x}$ définie sur]0;+oo[et de courbe *C'*.

1. Déterminez les limites de f en 0 et +oo. En déduire 2 asymptotes de C. Calculez f' et étudiez les variation de f.
2. Soit I, intersection de *C* et de l'axe des abscisses. Déterminez ses coordonnées.
3. Soit g(x)=1-x+2lnx pour tout x de]0;+oo[.
   a. Etudiez les variations de g.
   b. Démontrez que g(x)=0 admet un unique solution dans chacun des intervalles]0;2[et]2;4[. Donnez un encadrement de ces solutions à 10^{-1} près.
5. a. Démontrez que $f(x)-\frac{1}{x}=\frac{g(x)}{x^2}$. En déduire que *C* et *C'* se coupent en deux points à préciser.
   b. Démontrez que pour tout x de]4;+oo[, $0<f(x)\leqslant\frac{1}{x}$.
   c.Tracez *C'* puis *C*.