I) 6 pts

1. $|z_1| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \theta = -\dfrac{3\pi}{4} \, (2\pi)$

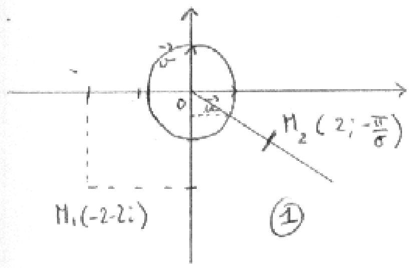
$z_1 = 2\sqrt{2}\, e^{i\,-\frac{3\pi}{4}}$ (1)

$|z_2| = \sqrt{3+1} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta' = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta' = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \theta' = -\dfrac{\pi}{6} \, (2\pi)$

$z_2 = 2\, e^{i\,-\frac{\pi}{6}}$ (1)

2.



3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} e^{i\,-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}\, e^{i\,\frac{-9\pi+2\pi}{12}} = \sqrt{2}\, e^{i\,-\frac{7\pi}{12}}$ (1,5)

donc $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{2}$ et $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{7\pi}{12} \, (2\pi)$ (0,5)

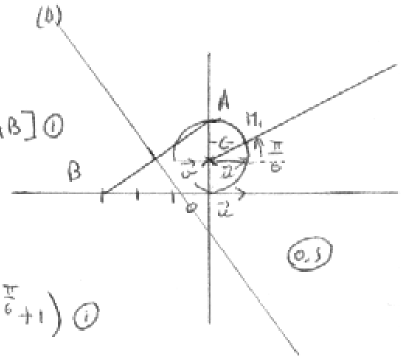
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(-2-2i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = \dfrac{-2\sqrt{3}-2i-2i\sqrt{3}+2}{4} = \dfrac{-2\sqrt{3}+2}{4} + i\,\dfrac{-2-2\sqrt{3}}{4}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{-\sqrt{3}+1}{2} + i\,\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\,\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$ (1)

D'où $\begin{cases} \cos -\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin -\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$ (0,5)

II) 1) a. Soit $A(2i)$ et $B(-3)$ (4,5 pts)

$|z-2i| = |z+3|$ ssi $MA = MB$: le lieu de M est la médiatrice (D) de $[AB]$ (1)



b. Soit $C(i)$.

$\text{Arg}(z-i) = \dfrac{\pi}{6} \, (2\pi)$ ssi $(\vec{u}\,;\overrightarrow{CM}) = \dfrac{\pi}{6} \, (2\pi)$ et $M \neq C$

Le lieu de M est la demi-droite $[CM_1)$ privée de C où $M_1\left(e^{i\frac{\pi}{6}}+1\right)$ (1)

2) $p(z) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$
$= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$
$= z^3 + z - 2$ donc $\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b - a = 0 \\ c - b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 \\ c = 2 \\ b = a = 1 \\ c - b = 2 - 1 = 1 \end{cases}$

$p(z) = (z-1)(z^2+z+2)$ (1)

* $z_1 = 1$
* $z^2 + z + 2 = 0$
  $\Delta = 1 - 8 = -7$
  $z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}$
  $z_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}$

$S = \left\{1\,;\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{2}\,;\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right\}$ (1)

III

1a) e^x est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, x est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc u est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (0,5)

$u'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$ (1)

$u(x) - u'(x) = \frac{1}{x^2} e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc u vérifie (E) (0,5)

b) $v - u$ vérifie (E')

$\Leftrightarrow (v-u) - (v-u)' = 0$

$\Leftrightarrow v - u - v' + u' = 0$ (1,5)

$\Leftrightarrow v - \frac{e^x}{x} - v' + \frac{-1}{x^2} e^x + \frac{e^x}{x} = 0$

$\Leftrightarrow v - v' = \frac{e^x}{x^2}$

$\Leftrightarrow v$ vérifie (E)

c. Les solutions de (E') s'écrivent sous la forme ke^x où $k \in \mathbb{R}$

donc les solutions de (E) s'écrivent sous la forme $f_k(x) = u(x) + ke^x = \frac{e^x}{x} + ke^x = e^x\left(\frac{1}{x} + k\right) = \frac{1+kx}{x} e^x$ (1)

d. On a besoin de connaître une valeur de $f_k(x)$. (0,5)

2. (4) : $f_k(1) = 0$

$(1+k)e = 0$

$k = -1$. Donc (4) correspond à f_{-1}

(3) $f_k(4) = 0$

$(1+4k)e = 0$

$k = -\frac{1}{4}$ Donc (3) correspond à $f_{-0,25}$

(2)

(1) $f_0(x) = \frac{e^x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = +\infty$ donc (1) correspond à f_0 et il ne reste plus que (2) et $f_{-0,5}$.

3. $f_{-1}(x) = \frac{1-x}{x} e^x$

a. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{+\infty} f_{-1} = -\infty$ (1)

$*\ \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

donc $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f_{-1} = +\infty$ (1,0)

b. $f'_{-1}(x) = \frac{-x-(1-x)}{x^2} e^x + \frac{1-x}{x} e^x$

$= \frac{-x^2 + x - 1}{x^2} e^x$ (1)

c. $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc $-x^2 + x - 1$ est toujours négatif

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	
f	$\Vert$	$+\infty \searrow$	$-\infty$

(1)