DS TS n°2

I) ① • $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\mapsto+\infty} x = +\infty$ (1).

• $\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} x = -\infty$ (1)

• $f(x) = \frac{(x-1)(x^2-x+2)}{(x^2-1)(x+1)}$ donc $\lim_{x\mapsto 1} f(x) = \lim_{x\mapsto 1} \frac{x^2-x+2}{x+1} = \frac{2}{2} = 1$ (2)

② $\lim_{x\mapsto 2} x+2 = 4$

$\lim_{x\mapsto 2^-} x^2-4 = 0^-$ donc $\lim_{2^-} f = -\infty$ (1)

$\lim_{x\mapsto 2^+} x^2-4 = 0^+$ donc $\lim_{2^+} f = +\infty$ (1)

③ $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}^2 - \sqrt{x+1}^2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}$ donc $\lim_{+\infty} f = 0$ (1,5)

④ $f(x) = \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$ donc $\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{2}} f(x)$ est le nombre dérivé de $\cos(x)$ en $\frac{\pi}{2}$ (2)

càd $-\sin(\frac{\pi}{2})$. donc $\lim_{\frac{\pi}{2}} f = -1$

⑤ $f(x) = v\circ u(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \frac{x+2}{x-1} \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ (2)

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\mapsto 1^+} u(x) = +\infty \\ \lim_{x\mapsto +\infty} v(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $\lim_{1^+} f = +\infty$

II) 1. $U_n = \left(\frac{7}{4}\right)^n \times \frac{1}{16}$ suite géométrique de raison $\frac{7}{4} > 1$. (U_n) diverge vers $+\infty$. (1,5)

2. $U_n = f(n)$ avec $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$ (cf I.3). donc $\lim U_n = 0$ (1,5)

3. $\frac{-n}{n^2+2n+1} < U_n < \frac{n}{n^2+2n+1}$

$\lim \frac{-n}{n^2+2n+1} = \lim \frac{n}{n^2+2n+1} = 0$ donc $\lim U_n = 0$ (Th des gendarmes) (2)

III) 1. C'est du cours : somme de n premiers termes d'une suite arithmétique de raison q=1 et de premier terme $v_0 = 1$ (1,5)

2. $U_n = \frac{1}{n^2}(1+2+\dots+n)$

$= \frac{n(n+1)}{2n^2}$

$= \frac{n+1}{2n}$ (1,5) donc $\lim U_n = \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ (1)