DM n° 7

Conjectures : f semble croissante sur $[-3;2]$. (C) semble sous (xx') sur $[-3;0]$ et au dessus ensuite.

Partie A

① $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x = e^{x-1}(x^2+2x) - x = (e^{x-1}(x+2)-1)x = x\,g(x)$

② a. • $\lim\limits_{x\to+\infty} x+2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$ } $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{x-1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$

• $g(x) = xe^{x-1} + 2e^{x-1} - 1 = xe^x \times e^{-1} + 2e^{x-1} - 1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x-1} = 0$ } $\lim\limits_{-\infty} g = -1$

b. $g'(x) = e^{x-1} + (x+2)e^{x-1} = (x+3)e^{x-1}$

c.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-3) = -e^{-4} - 1$

d. • sur $]-\infty;-3]$, $g < 0$: $g(x) = 0$ n'a aucune solution sur cet intervalle

• sur $[-3;+\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement croissante.

$g(-3) = -e^{-4}-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$; $0 \in [-e^{-4}-1;+\infty[$ } D'après le th. des valeurs intermédiaire $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur cet intervalle.

• $g(0,20) \simeq -0,115$; $g(0,21) \simeq 0,03$; $0 \in [g(0,2);g(0,21)]$ } Comme précédemment, on peut affirmer que $\alpha \in [0,20;0,21]$

e.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

La première conjecture était fausse.

Partie B

1. • $g(\alpha)=0$ donc $(\alpha+2)e^{\alpha-1}-1=0$ donc $e^{\alpha-1}=\dfrac{1}{\alpha+2}$

• $f(\alpha)=\alpha^2 e^{\alpha-1}-\dfrac{\alpha^2}{2}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha+2}-\dfrac{\alpha^2}{2}=\dfrac{2\alpha^2-\alpha^3-2\alpha^2}{2(\alpha+2)}=\dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

2. a. $h'(x)=\dfrac{-3x^2(2x+4)-(-x^3)\times 2}{4(x+2)^2}=\dfrac{-4x^3-12x^2}{4(x+2)^2}=\dfrac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

	0		1
$x+3$		+	
$h'(x)$		−	
h	0	↘	$\frac{-1}{6}$

b. h est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$

$0,20<\alpha<0,21$

$\begin{cases} h(0,21)<h(\alpha)<h(0,20) \\ h(0,21)<f(\alpha)<h(0,20) \end{cases}$

Donc $-0,0020<f(\alpha)<-0,0019$ donc $f(\alpha)<0$

3. a.

$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{x^2}{2}=-\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^xe^{-1}-\dfrac{x^2}{2}=-\infty$

• $f(x)=x^2\left(e^{x-1}-\frac{1}{2}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1}-\frac{1}{2}=+\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$

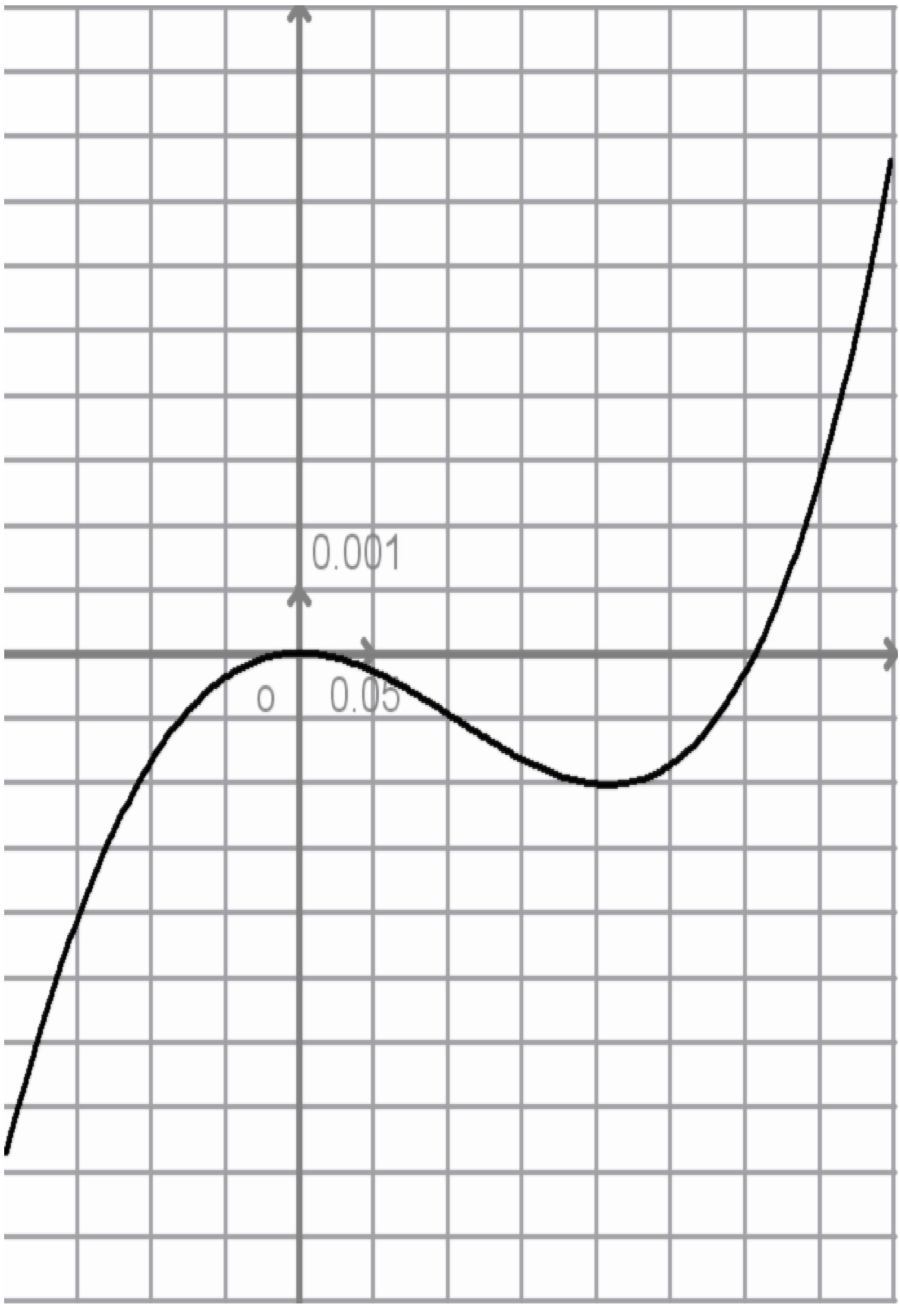
	$-\infty$		0		α		β		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	0	↘	$f(\alpha)$	↗	0	↗	$+\infty$

f est continue et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$

$\left.\begin{array}{l} f(\alpha)<0 \\ \lim\limits_{+\infty} f=+\infty \\ 0\in[f(\alpha);+\infty[\end{array}\right\}$ D'après le th des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\beta\in[f(\alpha);+\infty[$ tq $f(\beta)=0$

$\left.\begin{array}{l} \bullet f(0,3)\simeq-0,0003 \\ f(0,31)\simeq 0,000015 \\ 0\in[f(0,3);f(0,31)] \end{array}\right\}$ Avec les mêmes hypothèses que précédemment, on en déduit $\beta\in[0,3;0,31]$

	$-\infty$		0		β		$+\infty$
$f(x)$		−	0	+	0	−	


0.001
o
0.05