

DM n°6

(I)  $U_{n+1} - U_n = \frac{-U_n^2 - 2U_n + 3}{U_n + 4}$   
 $U_n + 4$  est toujours positif car  $U_n \in [0; 1]$

Étudions le signe de  $-U_n^2 - 2U_n + 3$

$\Delta = 4 - 4 \times 3 \times -1 = 16$   
 $\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$   $-U_n^2 - 2U_n + 3$   $\begin{matrix} | & - & | & + & | & - & | & + & | & - & | & + \end{matrix}$

Comme  $U_n \in [0; 1]$ ,  $-U_n^2 - 2U_n + 3 \geq 0$

Ainsi  $U_{n+1} - U_n \geq 0$  donc  $(U_n)$  est croissante (2)

(2)  $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3} \times \frac{U_n + 3}{U_n - 1} = \frac{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} - \frac{U_n + 4}{U_n + 4}}{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} + \frac{3(U_n + 4)}{U_n + 4}} \times \frac{U_n + 3}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{5U_n + 15} \times \frac{U_n + 3}{U_n - 1} = \frac{U_n + 3}{5U_n + 15} = \frac{1}{5}$  (2)

$V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 3} = -\frac{1}{3}$  donc  $(V_n)$  est une suite géo de raison  $q = \frac{1}{5}$  et de premier terme  $V_0 = -\frac{1}{3}$  car  $q \in [0; 1]$  donc  $(V_n)$  converge vers 0 (2)

(3)  $(V_n)$  est géo avec

(4)  $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$  donc  $U_n(V_n - 1) + 3U_n = -1$  soit  $U_n = \frac{-1 - 3U_n}{V_n - 1}$  (1)

$\lim U_n = \lim \frac{-1 - 3U_n}{V_n - 1} = 1$  (1)

(II) (1)  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$  (0.5)

$\cos x$  et  $\sin x$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\cos x$  ne s'annule que pour  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

donc  $f$  est dérivable sur  $\text{Dom } f$  (0.5)

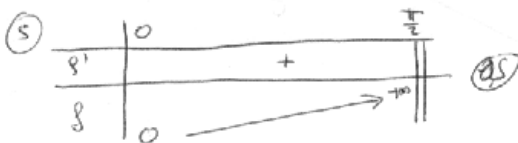
(2)  $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -f(x)$  donc  $f$  est impaire (1)

$f(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = f(x)$  donc  $f$  a pour période  $T = \pi$  (1)

En étudiant  $f$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$ , on obtiendra par symétrie  $]-\frac{\pi}{2}; 0]$  et ainsi la période entière (0.5)

(3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+$   
 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1$  }  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$  (1.5)

(4)  $f'(x) = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos x \times \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$  (0.5)



(5)  $y = \frac{1}{\cos^2 0} (x - 0) + \tan 0$   
 $y = x$  (0.5)

(III) (1)  $(e^{-x})^3 = \left(\frac{1}{e^x}\right)^3$ ;  $\frac{1}{e^{2x}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^2$ ;  $e \times e^x = e^{x+1}$ ;  $\sqrt{e^{-2x}} = (e^{-2x})^{\frac{1}{2}} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$  (2)

(2)  $f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{\frac{e^x + 1}{e^x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x)$ :  $f$  est impaire (1.0)

(3)  $f$  est croissante (1.0)