DM n°6

I 1) $U_{n+1}-U_n = \dfrac{-U_n^2-2U_n+3}{U_n+4}$ ← toujours positif car $U_n \in [0;1]$. Etudions le signe de $-U_n^2-2U_n+3$

$\Delta = 4-4\times 3\times -1 = 16$

$\begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$-U_n^2-2U_n+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Comme $U_n \in [0;1]$, $-U_n^2-2U_n+3 \geqslant 0$

Ainsi $U_{n+1}-U_n \geqslant 0$ donc (U_n) est croissante. (2)

2) $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} \times \dfrac{U_n+3}{U_n-1} = \dfrac{\frac{2U_n+3}{U_n+4} - \frac{U_n+4}{U_n+4}}{\frac{2U_n+3}{U_n+4} + \frac{3(U_n+4)}{U_n+4}} \times \dfrac{U_n+3}{U_n-1} = \dfrac{\frac{U_n-1}{U_n+4}}{\frac{5U_n+15}{U_n+4}} \times \dfrac{U_n+3}{U_n-1} = \dfrac{U_n+3}{5U_n+15} = \dfrac{1}{5}$ (2)

$V_0 = \dfrac{U_0-1}{U_0+3} = -\dfrac{1}{3}$ donc (V_n) est une suite géo de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{1}{3}$ 0,5

3) (V_n) est géo avec $q \in [0;1]$ donc (V_n) converge vers 0 0,5

4) $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+3}$ donc $U_n(V_n-1)+3V_n = -1$ soit $U_n = \dfrac{-1-3V_n}{V_n-1}$ (1)

$\lim U_n = \lim \dfrac{-1-3V_n}{V_n-1} = 1$ (1)

II 1) • $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi ; \frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}$ $k \in \mathbb{Z}$. 0,5

• $\cos x$ et $\sin x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et cos ne s'annule que pour $x = \pm\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

donc f est dérivable sur D_f. 0,5

2) • $f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -f(x)$ donc f est impaire (1)

• $f(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = f(x)$ donc f a pour période $T = \pi$. (1)

• En étudiant f sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, on obtiendra par symétrie $]-\frac{\pi}{2};0]$ et ainsi une période entière 0,5.

3) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin(x) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ 1,5

4) $f'(x) = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \times \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ (1) (0,5) 0,5

5)

x	0		$\frac{\pi}{2}$
f'		$+$	
f	0	↗	$+\infty$

0,5

6) $y = \dfrac{1}{\cos^2 0}(x-0) + \tan 0$ 0,5

$y = x$

III 1) $(e^{-x})^3 = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^3$; $\dfrac{1}{e^{2x}} = \left(\dfrac{1}{e^x}\right)^2$; $e \times e^x = e^{x+1}$; $\sqrt{e^{-2x}} = \left(e^{-2x}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ (2)

2) $f(-x) = \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x)$: f est impaire 1,0

3) cf cours 1,0