DM n°5

(I) a) $z \neq 0$ $\quad$ * $z^2+1 = z$ soit $z^2 - z + 1 = 0$. $\Delta = -3 \to \begin{cases} z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\quad S = \left\{\frac{1+i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

b) $\Delta = 4(1+\cos\theta)^2 - 4(1+\cos\theta)\times 2 = 4+4\cos^2\theta+8\cos\theta-8-8\cos\theta = 4(\cos^2\theta-1) = -4\sin^2\theta$

• si $\theta = 0(\pi)$ alors $\Delta = 0$ et $S = \left\{\frac{1+\cos\theta}{2}\right\}$

• si $\theta \neq 0(\pi)$ alors $\Delta < 0$: $i\sqrt{|\Delta|} = 2i|\sin\theta|$; $S = \left\{\frac{1+\cos\theta}{2} + \frac{i|\sin\theta|}{2} ; \frac{1+\cos\theta}{2} - \frac{i|\sin\theta|}{2}\right\}$

Comme $\sin\theta = \pm|\sin\theta|$, $S = \left\{\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{2} ; \frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{2}\right\}$

c) On pose $Z = z^2$. on doit résoudre $Z^2+4Z+3 = 0$

$\Delta = 16-12 = 4 \to \begin{cases} Z_1 = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ Z_2 = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$

Soit $z^2 = -1$ soit $z^2 = -3$ $\to S = \{i ; -i ; \sqrt{3}i ; -\sqrt{3}i\}$

(II) (1) $D_f =]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$

une fct rationnelle est dérivable et continue sur chaque intervalle où elle est définie

(2) $f'(x) = \frac{-(x(x+1))'}{x^2(x+1)^2} = \frac{-(x+1)-x}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{1}{x(x+1)} = 0^+$ et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x(x+1)} = 0^+$: asymptote horizontale $y=0$ en $\pm\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto-1^-} x+1 = 0^- \\ \lim\limits_{x\mapsto-1} x = -1\end{array}\right\} \lim\limits_{-1^-} f = +\infty$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto-1^+} x+1 = 0^+ \\ \lim\limits_{x\mapsto-1^+} x = -1\end{array}\right\} \lim\limits_{-1^+} f = -\infty$: asymptote verticale $x=-1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto0^-} x+1 = 1 \\ \lim\limits_{x\mapsto0^-} x = 0^-\end{array}\right\} \lim\limits_{0^-} f = -\infty$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{0^+} x+1 = 1 \\ \lim\limits_{0^+} x = 0^+\end{array}\right\} \lim\limits_{0^+} f = +\infty$: asymptote verticale $x=0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
f	0^+	↗ $+\infty$	||	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0^+

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdot-\frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

(3) • $f(x)$ est positif sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ et négatif sur $]-1;0[$

(4) $\frac{1}{(x+1)x} \leqslant \frac{1}{2}$ pour $x \in D$

$\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{2} \leqslant 0$

$\frac{2-x^2-2x}{x(x+1)} \leqslant 0$

$\frac{-(x-1)(x+2)}{x(x+1)} \leqslant 0$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$-(x-1)(x+2)$		$-$	0	$+$	||	$+$	||	$+$	0	$-$	
$x(x+1)$		$+$		$+$	||	$-$	||	$+$		$+$	
$\frac{-(x-1)(x+2)}{x(x+1)}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

D'où $S =]-\infty;-2] \cup]-1;0[\cup [1;+\infty[$

⑤ $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)} = \frac{0x+1}{x(x+1)} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

⑥ $\left.\begin{array}{l} U_n = f(n) \\ \lim\limits_{+\infty} f = 0 \end{array}\right\}$ (U_n) converge vers 0

⑦ $S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$= \frac{n}{n+1} \rightarrow \lim S_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$

III

① $\lim \frac{n\pi}{2n+1} = \lim \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$

② a. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$

b. $\lim \cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = 0$

IV 1. Soit z l'affixe de G et z' celle de G'

$z = \frac{1}{3}(2+i-1-i+2+3i)$

$z = \frac{1}{3}(3+3i)$

$z = 1+i$

$z' = \frac{1}{1}(2(2+i) + (-1-i) - 2(2+3i))$

$= 4+2i-1-i-4-6i$

$= -1-5i$

2. $\frac{\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\|}{\|2\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|} = 3 \Leftrightarrow \frac{\|3\vec{MG}\|}{\|\vec{MG'}\|} = 3 \Leftrightarrow \frac{MG}{MG'} = 1 \Leftrightarrow MG = MG'$

Le lieu de M est la médiatrice de $[GG']$