Correction DM°3

Ⅰ 1. $\Delta = -3$ donc $D_f = \mathbb{R}$. f est une fonction rationnelle donc elle est également dérivable, et donc continue sur $\mathbb{R}$. (1)

$$f'(x) = \frac{-(2x+1)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{-2x-1}{(1+x+x^2)^2} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+ \quad (2\times 0{,}5)$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0

(1)

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

2. **en 0 :** $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = -x + 1$ (1)

en 1 : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ (1)

3. **en 0 :**

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1-(-x+1)(x^2+x+1)}{1+x+x^2} = \frac{1+x^3-1}{1+x+x^2} = \frac{x^3}{\underbrace{1+x+x^2}_{>0}} \quad (1)$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-(-x+1)$		$-$	0	$+$	

$\mathcal{C}$ est en dessous de la tangente en 0 sur $]-\infty; 0]$ puis au dessus sur $[0; +\infty[$ (1)

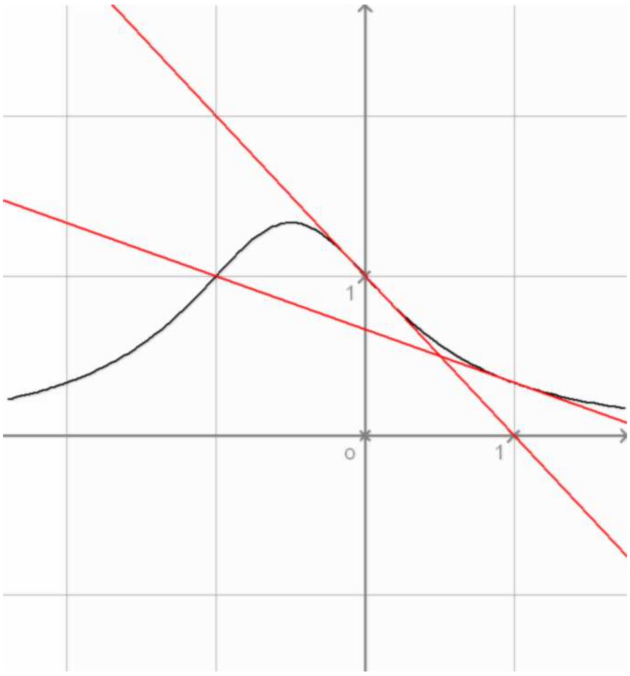
en 1 :

$$f(x) - \left(-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right) = \frac{3+(x-2)(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)} = \frac{x^3-x^2-x+1}{3(x^2+x+1)} = \frac{\overset{+}{(x-1)^2}(x+1)}{\underbrace{3(x^2+x+1)}_{>0}} \quad (2)$$

(factorisé par identification)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)-(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$(\mathcal{C})$ est en dessous de la tangente en 1 sur $]-\infty; -1]$ est au dessus sur $[-1; +\infty[$ (1)



II

$$\begin{cases} (2-i)z + (2+i)z' = 6 & L_1 \times (1+i) \\ (1+i)z + 2iz' = 5-i & L_2 \times (2-i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3+i)z + (1+3i)z' = 6+6i & L_1 - L_2 \\ (3+i)z + (2+4i)z' = 9-7i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-1-i)z' = -3+13i \\ z = \dfrac{9-7i-(2+4i)z'}{3+i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = \dfrac{-3+13i}{-1-i} = -5-8i \\ z = \dfrac{9-7i-(2+4i)(-5-8i)}{(3+i)} = -1+10i \end{cases}$$

Graph : 1

2

$\Rightarrow S = (-1+10i \; ; -5-8i)$

III /

① $p(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + 3az^2 + 3bz + 3c$

$= az^4 + bz^3 + (c+3a)z^2 + 3bz + 3c$

$= z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c + 3a = 24 \\ 3b = -18 \\ 3c = 63 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 24 - 3 = 21 \\ b = -\frac{18}{3} = -6 \\ c = \frac{63}{3} = 21 \end{cases}$ D'où $p(z) = (z^2+3)(z^2 - 6z + 21)$ ①

② * $z^2 = -3$

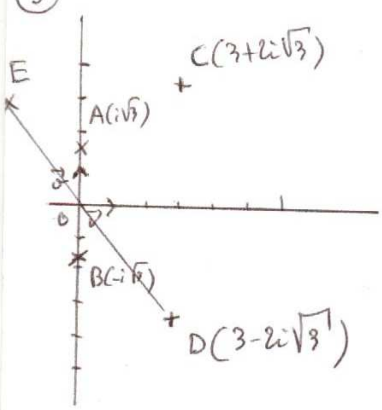
$\begin{cases} z_1 = i\sqrt{3} \\ z_2 = -i\sqrt{3} \end{cases}$

* $z^2 - 6z + 21 = 0$

$\Delta = -48 \Rightarrow \begin{cases} z_3 = \frac{6 + i\sqrt{48}}{2} = \frac{6 + 4i\sqrt{3}}{2} = 3 + 2i\sqrt{3} \\ z_4 = 3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$

$S = \{ i\sqrt{3} ; -i\sqrt{3} ; 3 + 2i\sqrt{3} ; 3 - 2i\sqrt{3} \}$ ②

③



a. Soit $I(3)$,

$AI = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

$BI = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

$CI = \sqrt{0+12} = \sqrt{12}$

$DI = \sqrt{0+12} = \sqrt{12}$

(1,5)

donc A, B, C et D sont le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

b. $E(-3+2i\sqrt{3})$

$\vec{EC}\,(6)$ donc $EC = 6$

$\vec{EB}\,(3-3;\sqrt{3})$ donc $EB = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

$\vec{BC}\,(3+3i\sqrt{3})$ donc $BC = 6$

} EBC est équilatéral.

(1,5)