

DM n° 1

Ex 1:

① Soit $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = a \frac{h}{h}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} a \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a$. Donc $f'(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② * d'après ①, $(x^1)' = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang $n=1$

* supposons que $(x^n)' = n x^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

$$(x^{n+1})' = (x \times x^n)' = x' \times x^n + (x^n)' \times x = x^n + n x^{n-1} \times x = x^n + n x^n = (n+1) x^n$$

La propriété devient vraie au rang $n+1$.

* Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^n)' = n x^{n-1}$.

Ex 2:

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x^2 - 4x - 6}$

* $2x^2 - 4x - 6 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times (-6) \times 2 = 64$

$x_1 = \frac{4+8}{4} = 3$

$x_2 = \frac{4-8}{4} = -1$

$D_f = \mathbb{R} - \{-1; 3\}$

f est dérivable sur D_f .

* $f'(x) = \frac{(-2x-1)(2x^2-4x-6) - (4x-4)(-x^2-x+2)}{(2x^2-4x-6)^2}$

$= \frac{-4x^3 + 8x^2 + 12x - 2x^3 + 4x + 6 + 4x^3 + 4x^2 - 8x - 4x^2 - 4x + 8}{(2x^2-4x-6)^2}$

$= \frac{6x^2 + 4x + 14}{(2x^2-4x-6)^2}$

* tangente en 0:

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = \frac{7}{18}x - \frac{1}{3}$

* variations: $6x^2 + 4x + 14 > 0 \Rightarrow \Delta = -320$

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
f		↗	↗	↗

b) $f(x) = (2x+3)\sqrt{3-2x}$

* $3-2x \geq 0$

$x \leq \frac{3}{2}$

$D_f =]-\infty; \frac{3}{2}]$

f est dérivable sur $]-\infty; \frac{3}{2}[$

* $f'(x) = 2\sqrt{3-2x} + \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}(2x+3)$

$= 2\sqrt{3-2x} - \frac{2x+3}{\sqrt{3-2x}}$

$= \frac{2(3-2x) - (2x+3)}{\sqrt{3-2x}}$

$= \frac{-6x+3}{\sqrt{3-2x}}$

* tangente en 0:

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = \frac{3}{\sqrt{3}}x + 3\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$

* variations

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		+	-
f		↗	↘

$4\sqrt{2}$ 0

Ex3: On pose $x = CM$. $x \in [0; 5]$

* C, M, B alignés
C, Q, A alignés
(QM) // (AB) } d'après le théorème de Thalès, $\frac{CM}{CB} = \frac{CQ}{CA} = \frac{QM}{AB}$

$$\text{D'où } \frac{x}{5} = \frac{QM}{3}, \text{ soit } QM = \frac{3}{5}x$$

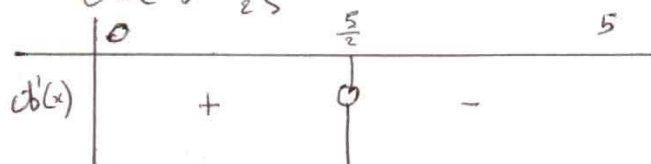
* De même, grâce au théorème de Thalès, $\frac{PM}{4} = \frac{5-x}{5}$.

$$\text{D'où } PM = \frac{4}{5}(5-x)$$

* L'aire de MPAQ est

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \frac{3}{5}x \times \frac{4}{5}(5-x) \\ &= \frac{12}{25}(5x - x^2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{12}{25}(5-2x)$$



$\mathcal{A}'(x)$ s'annule en changeant de signe en $\frac{5}{2}$: le point M doit être au milieu de [BC] pour que l'aire de MPAQ soit maximum.