DM n° 1

Ex 1 :

① Soit $f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = a\frac{h}{h}$$

$\lim\limits_{h \to 0} a\frac{h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} a = a$. Donc $f'(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② * d'après ①, $(x^1)' = 1$ donc la propriété est vérifiée au rang $n = 1$

* supposons que $(x^n)' = n x^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

$$(x^{n+1})' = (x \times x^n)' = x' \times x^n + (x^n)' \times x = x^n + n x^{n-1} \times x = x^n + n x^n = (n+1) x^n$$

la propriété devient vraie au rang $n+1$.

* Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x^n)' = n x^{n-1}$.

Ex 2 :

a) $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 2}{2x^2 - 4x - 6}$.

* $2x^2 - 4x - 6 = 0$

$\Delta = 16 - 4 \times -6 \times 2 = 64$

$x_1 = \dfrac{4+8}{4} = 3$

$x_2 = \dfrac{4-8}{4} = -1$

$Df = \mathbb{R} - \{-1 ; 3\}$

f est dérivable sur Df.

* $f'(x) = \dfrac{(-2x-1)(2x^2-4x-6) - (4x-4)(-x^2-x+2)}{(2x^2-4x-6)^2}$

$= \dfrac{-4x^3 + 8x^2 + 12x - 2x^2 + 4x + 6 + 4x^3 + 4x^2 - 8x - 4x^2 - 4x + 8}{(2x^2-4x-6)^2}$

$= \dfrac{6x^2 + 4x + 14}{(2x^2-4x-6)^2}$

* tangente en 0 :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = \dfrac{7}{18}x - \dfrac{1}{3}$

* variations : $6x^2 + 4x + 14 = 0 \Rightarrow \Delta = -320$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	||	+	
f		$\nearrow$	||	$\nearrow$	||	$\nearrow$	

b) $f(x) = (2x+3)\sqrt{3-2x}$

* $3 - 2x \geq 0$

$x \leq \dfrac{3}{2}$

$Df = \left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right]$

f est dérivable sur $\left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right[$

* $f'(x) = 2\sqrt{3-2x} + \dfrac{-2}{2\sqrt{3-2x}}(2x+3)$

$= 2\sqrt{3-2x} - \dfrac{2x+3}{\sqrt{3-2x}}$

$= \dfrac{2(3-2x) - (2x+3)}{\sqrt{3-2x}}$

$= \dfrac{-6x+3}{\sqrt{3-2x}}$

* tangente en 0 :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = \dfrac{3}{\sqrt{3}}x + 3\sqrt{3}$

$y = \sqrt{3}\,x + 3\sqrt{3}$

* variations

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		+	0	−	||
f		$\nearrow$	$4\sqrt{2}$	$\searrow$	0

Ex3 : On pose $x = CM$. $x \in [0;5]$

* C, M, B alignés
C, Q, A alignés
$(QM) \parallel (AB)$
} d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{CM}{CB} = \dfrac{CQ}{CA} = \dfrac{QM}{AB}$

D'où $\dfrac{x}{5} = \dfrac{QM}{3}$. Soit $QM = \dfrac{3}{5}x$

* De même, grâce au théorème de Thalès, $\dfrac{PM}{4} = \dfrac{5-x}{5}$.

D'où $PM = \dfrac{4}{5}(5-x)$

* L'aire de MPAQ est

$$\mathcal{A}(x) = \frac{3}{5}x \times \frac{4}{5}(5-x)$$
$$= \frac{12}{25}(5x - x^2)$$

$$\mathcal{A}'(x) = \frac{12}{25}(5-2x)$$

x	0		$\frac{5}{2}$		5
$\mathcal{A}'(x)$		$+$	0	$-$	

$\mathcal{A}(x)$ s'annule en changeant de signe en $\dfrac{5}{2}$: le point M doit être au milieu de $[BC]$ pour que l'aire de MPAQ soit maximum.