I) 1. a. $f'(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $f(0)=0$ et $\lim_{+\infty} f=1$ (1,5)

	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	1

(1)

(1,5) b. $U_n=f(n)$ donc (U_n) est croissante, $\lim U_n=\lim_{+\infty} f=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $U_n\in]0;1]$

2. a * $X_1=U_1=\frac{1(1+2)}{(1+1)^2}=\frac{3}{2^2}=\frac{1+2}{2(1+1)}$; la prop est vraie au rang 1. (0,5)

* supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tq $X_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$

$$X_{n+1}=X_n\times U_{n+1}=\frac{\cancel{n+2}}{2\cancel{(n+1)}}\times\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}=\frac{n+3}{2(n+2)}=\frac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)}$$; la prop devient vraie au rang n+1 (1)

* Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n=\frac{n+2}{2(n+1)}$ (0,5)

b. $\lim X_n=\lim\frac{n+2}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$ (0,5)

3. a) $U_n\in]0;1]$ donc $\ln U_n$ est défini et $\ln U_n\in]-\infty;0]$ (0,5)

b). (U_n) est croissante donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{U_{n+1}}{U_n}>1$ (0,5)

. $V_{n+1}-V_n=\ln(U_{n+1})-\ln(U_n)=\ln\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$. Comme $\frac{U_{n+1}}{U_n}>1$, $\ln\frac{U_{n+1}}{U_n}>0$

(V_n) est croissante. (0,5)

c) (V_n) est croissante et majorée par 0 donc elle converge vers $\ell\in[0;1]$ (0,5)

$V_n=\ln\circ f(n)$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{+\infty} f=1\\ \lim_{x\to 1}\ln(x)=0\end{array}\right\}$ $\lim_{+\infty}\ln\circ f=0$ donc (V_n) converge vers 0. (1)

4. a) $Y_n=\ln(U_1)+\ln(U_2)+\dots+\ln(U_n)$

$=\ln(U_1\times U_2\times\dots\times U_n)$

$=\ln(X_n)$ (1)

b) $\left.\begin{array}{l}\lim X_n=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to\frac{1}{2}}\ln(x)=\ln\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ $\lim Y_n=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$ (1)

/12,5

II

1) (P) admet $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et passe par $I(1;1;4)$ milieu de [AB] (0,5)

$M \in (P) \Leftrightarrow \vec{MI}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-4\end{pmatrix} \perp \vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{MI}\cdot\vec{AB}=0$

$\Leftrightarrow 6x-4y-2z+6=0$ (1)

2) $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\-4\\-2\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{9+16}=5$

$$\left.\begin{array}{l} * \ \vec{AB}\cdot\vec{AC}=10\sqrt{14}\cos\widehat{BAC} \\ * \ \vec{AB}\cdot\vec{AC}=18+8=26 \end{array}\right\} \cos\widehat{BAC}=\frac{26}{10\sqrt{14}} \rightarrow \widehat{BAC}\approx 46^{\circ}$$ (1,5)

3) a) $\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Leftrightarrow 3a-4c=0$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Leftrightarrow 6a-4b-2c=0$

on cherche a, b, c tq $\begin{cases}3a-4c=0\\6a-4b-2c=0\end{cases}$ (1)

b) Pour $a=1$, $\begin{cases}c=+\frac{3}{4}\\ b=\frac{-6+\frac{3}{2}}{-4}=\frac{9}{8}\end{cases}$ (ABC) admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\\frac{9}{8}\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ (1)

c) $I \in (P)\cap(ABC)$ donc (P) et (ABC) ne sont pas parallèles. (0,5)

III

1) [AB] est un diamètre de $(\mathcal{C})$ et $M\in(\mathcal{C})$ donc $(MA)\perp(MB)$ et $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ (0,5)

2) $\vec{CM}\cdot\vec{MB}=(\vec{CA}+\vec{AM})\cdot\vec{MB}$

$=\vec{CA}\cdot\vec{MB}+\vec{AM}\cdot\vec{MB}$

$=0+0$

$=0$ (1)

3) MBC est rectangle en M d'hypoténuse [BC] donc M parcourt le cercle de diamètre [BC] (0,5)

4) Les 2 sphères ont en commun les positions du point M càd le cercle $(\mathcal{C})$ (1)