I/

① **en -1^+** :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto -1^+} n\,\text{Ln}(1+x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\mapsto -1^+} \frac{x}{1+x} = -\infty\end{array}\right\} \lim_{-1^+} h_n = -\infty$$

en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto +\infty} n\,\text{Ln}(1+x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \frac{x}{x+1} = 1\end{array}\right\} \lim_{+\infty} h_n = +\infty$$

$$h'_n(x) = \frac{n}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{n}{1+x} + \frac{1}{(1+x^2)}$$

x	-1		$+\infty$
$h'_n(x)$	‖	+	
h_n	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$h_n(0)=0$. Comme h_n est strict^t croissante :

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	

② a) $f'_1(x) = \left(x\,\text{Ln}(1+x)\right)' = \text{Ln}(1+x) + \frac{x}{1+x} = h_1(x)$

$$f'_n(x) = n\,x^{n-1}\,\text{Ln}(1+x) + \frac{x^n}{1+x} = x^{n-1}\left(n\,\text{Ln}(1+x) + \frac{x}{1+x}\right) = x^{n-1}h_n(x)$$

b) si n impair alors $n-1$ pair et x^{n-1} est positif sur $]-1;+\infty[$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto -1^+} x^n = -1 \\ \lim\limits_{x\mapsto -1^+} \text{Ln}(1+x) = -\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{-1^+} f_n = +\infty$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^n = +\infty \\ \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \text{Ln}(1+x) = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
x^{n-1}	‖	$+$	0	$+$	
$f'_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f_n	‖ $-\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c) Si n est pair, $n-1$ est impair et : $\begin{cases}\text{si } x\in]-1;0] \text{ alors } x^{n-1}\leq 0 \\ \text{si } x\in[0;+\infty[\text{ alors } x^{n-1}\geq 0\end{cases}$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\mapsto -1^+} x^n = +1 \\ \lim\limits_{x\mapsto -1^+} \text{Ln}(1+x) = -\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{-1^+} f_n = -\infty$
- $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$ (comme au b))

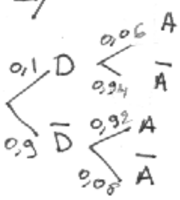
x	-1		0		
$h_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
x^{n-1}	‖	$-$	0	$+$	
$f'_n(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f_n	‖ $-\infty$	↗		↗	$+\infty$

3) $f_2(x) - f_1(x) = x^2 \ln(1+x) - x\ln(1+x) = (x^2 - x)\ln(1+x) = x(x-1)\ln(1+x)$

x	-1		0		1		$+\infty$
x	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$	||	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\ln(1+x)$	||	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f_2(x) - f_1(x)$	||	$-$	0	$-$	0	$+$	

- $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_1)$ se croisent pour $x = 0$ et $x = 1$
- $(\mathcal{C}_2)$ est en dessous de $(\mathcal{C}_1)$ sur $]-1;0[\cup]0;1[$
- $(\mathcal{C}_2)$ est au dessus de $(\mathcal{C}_1)$ sur $]1;+\infty[$

II/



① a) $p(E_1) = p(A \cap \overline{D}) = p_{\overline{D}}(A) \times p(\overline{D}) = 0,92 \times 0,9 = 0,828$

$p(E_2) = p(A \cap D) = p_D(A) \times p(D) = 0,06 \times 0,1 = 0,006$

b) D et $\overline{D}$ forment une partition donc :

$p(A) = p_D(A)\,p(D) + p_{\overline{D}}(A)\,p(\overline{D}) = p(E_2) + p(E_1) = 0,834.$

2) $P_A(D) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(A)} = \dfrac{p(E_2)}{p(A)} = \dfrac{0,006}{0,834} = 0,007$

3) La probabilité qu'aucun stylo ne soit défectueux est $(1 - 0,007)^4$

La probabilité qu'au moins un le soit est $1 - (1 - 0,007)^4 \simeq 0,028.$