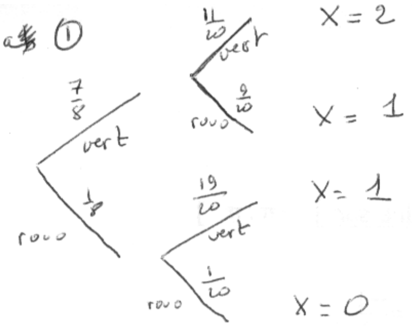
I) 1. a. (1)




b.

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{8}\times\frac{1}{20} = \frac{1}{160}$ | $\frac{1}{8}\times\frac{19}{20}+\frac{7}{8}\times\frac{9}{20} = \frac{41}{80}$ | $\frac{7}{8}\times\frac{11}{20} = \frac{77}{160}$ |

(2)

c. $E(X) = \frac{1}{160}\times 0 + \frac{41}{80}\times 1 + \frac{77}{160}\times 2$

$= \frac{59}{40}$

$= 1,475.$ (0,5)

2. a. $p_{E_n}(E_{n+1}) = \frac{1}{20}$. $\quad p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) = \frac{9}{20}$. (cf énoncé) (0,5)

b) $E_{n+1}\cap E_n$ et $E_{n+1}\cap\overline{E_n}$ sont disjoints donc (0,5)

$p(E_{n+1}) = p(E_{n+1}\cap E_n) + p(E_{n+1}\cap\overline{E_n})$

$p_{n+1} = p_{E_n}(E_{n+1})\times p(E_n) + p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\,p(\overline{E_n})$

$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n$ (1)

c. $p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}(1-p_n) = \frac{-8}{20}p_n + \frac{9}{20}$ (0,5)

3. a. $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{28\left(-\frac{8}{20}p_n+\frac{9}{20}\right)-9}{28p_n-9} = \frac{-\frac{56}{5}p_n+\frac{18}{5}}{28p_n-9} = -\frac{2}{5}\,\frac{28p_n-9}{28p_n-9} = -\frac{2}{5}.$ (1)

$(U_n)$ est une suite géo de raison $k = -\frac{2}{5}$.

b. • $U_n = U_1\times k^{n-1} = (28p_1-9)\,k^{n-1} = \left(28\times\frac{1}{8}-9\right)\times\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} = -\frac{11}{2}\times\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ (0,5)

• $p_n = \frac{U_n+9}{28} = \frac{-11}{56}\times\left(-\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{28} = \frac{22}{280}\times\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{9}{28} = \frac{11}{140}\times\left(-\frac{2}{5}\right)^n + \frac{9}{28}$ (0,5)

c. Comme $-\frac{2}{5}\in\,]-1;1[$, $\lim\left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$ donc $\lim p_n = \frac{9}{28}$. (1)

19

II/ $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x^2}$ $D_f=]0;+\infty[$ $h(x)=\dfrac{1}{x}$ $D_h=]0;+\infty[$

1. $f$ en $0^+$ :

$\lim\limits_{x\to 0^+} 1+2\ln x=-\infty$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0^+$ $\Big\}$ $\lim\limits_{0^+} f=-\infty$ (1)

$x=0$ est asymptote verticale

$f$ en $+\infty$ : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+2\dfrac{\ln x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$ $\Big\}$ $\lim\limits_{+\infty} f=0$ : $y=0$ est asymptote horizontale (1)

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x^2-2x(1+2\ln x)}{x^4}=\frac{2x-2x-4x\ln x}{x^4}=\frac{-4x\ln x}{x^4}\quad (0{,}5)$$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | | $-$ | | $-$ | |
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

(1) $f(1)=1$

2. $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+2\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$

$I(e^{-\frac{1}{2}};0)$ est le pt d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses. (0,5)

3. $g(x)=1-x+2\ln x$ $D_g=]0;+\infty[$

a) $g$ en $0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} 1-x=1$ ; $\lim\limits_{x\to 0^+} 2\ln x=-\infty$ $\Big\}$ $\lim\limits_{0^+} g=-\infty$ (0,5)

$g$ en $+\infty$ : $g(x)=x\left(\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{2\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}-1=-1$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0$ $\Big\}$ $\lim\limits_{+\infty} g=-\infty$ (1)

$$g'(x)=-1+\frac{2}{x}=\frac{2-x}{x}\quad (0{,}5)$$

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1+2\ln 2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

(1) $f(2)=-1+2\ln 2\approx 0{,}39$.

b) • $g(1)=0$

• $g$ est continue et strict$^t$ croissante sur $]0;2]$

$\lim\limits_{0^+} g=-\infty$

$g(2)>0$

D'après le Th des valeurs intermédiaires, $g$ s'annule une seule fois sur $]0;2]$ : c'est donc en $x=1$ (1,0)

• $g$ est continue est strict$^t$ décroissante sur $]2;+\infty[$

$g(2)>0$

$\lim\limits_{+\infty} g<0$

D'après le Th des valeurs intermédiaires, $g$ s'annule une seule fois sur $]2;+\infty[$ en $\alpha$. Comme $f(3{,}5)>0$ et $f(3{,}6)<0$, $\alpha\in[3{,}5;3{,}6]$ (1,0)

5 a) $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1+2\ln x - x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$

1

donc $f(x) - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

donc $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ se croisent pour $x = 1$ et $x \simeq 3,5$.

b) . si $x \in ]4;+\infty[$, $g(x) < 0$ donc $f(x) < \frac{1}{x}$

. si $x \in ]4;+\infty[$, $f(x) > 0$

Pour tout $x \in ]4;+\infty[$, $0 < f(x) < \frac{1}{x}$

1

Sur $]4;+\infty[$ $(\mathcal{C})$ est située entre l'axe des abscisses et $(\mathcal{C}')$.

c) Courbes. 2pts

13

Total sur 22