Suites (Chap 1).

I. Générer une suite.

1. Définition.

Déf :

On appelle suite numérique toute application d'une partie de *IN* sur *IR :* une suite peut donc être considérée comme une liste ordonnée de nombres réelles.

Pour une suite qui s'appelle « u » :

- (u_n) désigne l'ensemble des termes de la suite.
- u_n se lit : "u indice n" ou "terme d'indice n de la suite u" : si le premier terme de la suite est u_0 , u_n est le $n+1^{éme}$ terme de la suite (u_n) .

Ex :

Soit une liste ordonnée de nombres dont voici le début : -1;2;7;8;9;10;15;16;17;25;-45;-12;46;...

On peut créer la suite (u_n) avec $n \in N$ telle que $u_0=-1$ $u_1=2$ $u_2=7$ $u_3=8$ $u_4=9$ etc ...

u_4 est bien le $4+1^{ième}$ terme, c'est à dire le cinquième, de la suite (u_n) .

2. Suites arithmétiques.

Déf / prop :

Une suite arithmétique (u_n) est définie par son premier terme u_0 , une raison $r \in IR^*$ et la relation $u_n=u_0+n\times r$, pour tout $n \in N$.

On a alors :

- Pour tout $n \in N$ et tout $p \in N$, $u_n=u_p+(n-p)\times r$.
- Pour tout n in N, $S_n=u_0+u_1+...+u_n=\frac{(n+1)}{2}\times(u_0+u_n)=\frac{(n+1)}{2}\times(2u_0+nr)$.

Ex :

Soit une suite arithmétique (u_n) définie par son premier terme u_0 =-2, une raison r=3.

$u_5=u_0+5r=-2+15=13.$

$u_{10}=u_5+(10-5)r=13+15=28$

$S_{10}=u_0+...+u_{10}=\frac{10+1}{2}\times(u_0+u_{10})=\frac{11}{2}\times26=143$

3. Suites Géomètriques.

Déf / prop :

Une suite géomètrique (u_n) est définie par son premier terme u_0 , une raison $q \in IR^*$ et la relation $u_n = u_0 \times q^n$, pour tout $n \in N$.

On a alors :

- Pour tout $n \in N$ et tout $p \in N$, $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$.
- Pour tout n in N, $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Ex :

Soit une suite géomètrique (u_n) définie par son premier terme u_0 =-2, une raison q=-1.

$u_5 = u_0 \times (-1)^5 = -2 \times -1 = 2$.

$u_{10} = u_5 \times (-1)^{10-5} = 2 \times (-1)^5 = 2 \times -1 = -2$.

$S_{10} = u_0 + ... + u_{10} = u_0 \times \frac{1-(-1)^{11}}{1-(-1)} = -2 \times \frac{1+1}{2} = -2$.

4. Suites fonctions de n.

Déf :

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a;+oo[de IR où $a \in IR$.

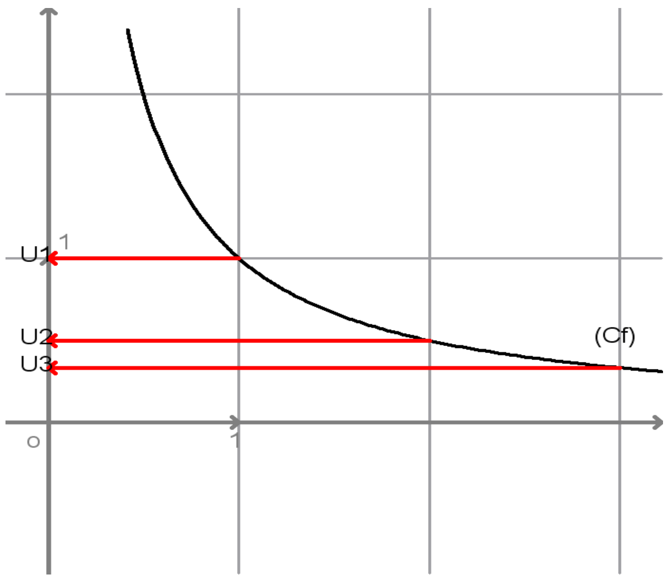
On peut définir la suite (u_n) de fonction associée f pour $n \geq a$ telle que ,pour tout $n \in N$ avec $n \geq a$, u_n =f(n).

Ex :

La suite définie pour tout $n \in N^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est la suite de fonction associée $f(x) = \frac{1}{x}$ qui est définie sur IR*.

$u_1 = f(1) = \frac{1}{1} = 1$ $u_2 = f(2) = \frac{1}{2}$ *etc...* .

Ci-contre, voici la reprsentation graphique des premiers termes de la suite, la courbe étant celle de f sur]0;3].



5. Suites récurrentes.

Déf :

Soit f une fonction définie D_f .

On peut définir une suite (u_n) de fonction associée f par son premier terme $u_0 \in D_f$ et la relation $u_{n+1}=f(u_n)$: une telle suite est appelée suite récurrente.

Pour que (u_n) soit bien définie, il faut que, pour tout $n \in N$, $f(u_n) \in D_f$.

Rem :

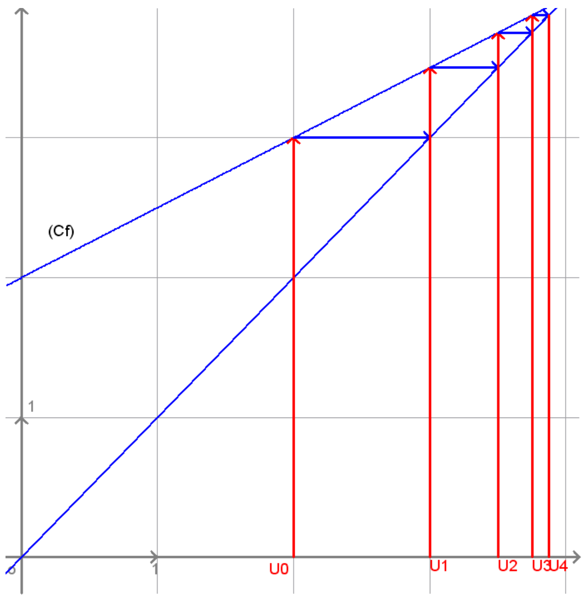
Les suites arithmétiques et géomètriques sont des suites récurrentes.

Ex :

Soit (u_n) telle que $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+2$. Cette suite est récurrente de fonction associée $f(x)=\frac{x}{2}+1$ qui est définie sur IR : elle est donc définie sur N.

$$u_1=f(u_0)=f(2)=\frac{2}{2}+2=3$$

$$u_2=f(u_1)=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$



Ci-contre, voici la reprsentation graphique des premiers termes de la suite, une courbe étant celle de f et l'autre celle *g(x)=x*.

II. comportement d'une suite

1. Majoration.

Déf :

- On dit qu'une suite est majorée par un réel M (resp minorée par un réel m) si et seulement si, pour tout $n \in N$, $U_n < M$ (resp $U_n > m$).
- Une suite à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Ex:

Soit (U_n) la suite définie par $U_n=1+\cos(n)$ pour tout $n \in N$.

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$0 \leq \cos(n)+1 \leq 2$$

donc (U_n) est bornée car minorée par 0 et majorée par 2.

2. Variations.

Déf :

Soit (u_n) une suite et $p \in N$.

- Si pour tout n>p on a $u_n < u_{n+1}$ alors (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Si pour tout n>p on a $u_n > u_{n+1}$ alors (u_n) est décroissante à partir du rang p.
- Si une suite et croissante ou décroissante à partir du rang p, on dit qu'elle est monotone à partir du rang p.

Rem :

Certaines suites ne sont pas monotone, comme celle définie par $U_n = (-1)^n$ pour tout $n \in N$.

Méthode 1 :

On détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n : s'il est positif la suite est croissante sinon elle est décroissante.

Méthode 2 :

Dans le cas où tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on compare de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 pour tout n : si 1 est plus petit la suite est croissante et si 1 est plus grand elle est décroissante.

Méthode 3 :

Si la suite (u_n) est telle que pour tout $n \in N$ $u_n = f(n)$, on étudie les variations de f :

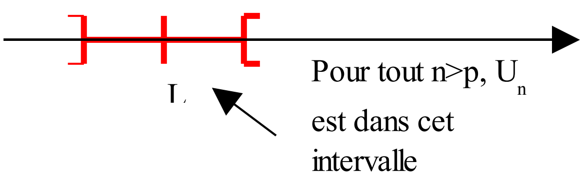
- Si à partir d'un réel $a \in IR$ f est strictement croissante alors (u_n) est croissante à partir du premier entier supérieur ou égal à a.
- Si à partir d'un réel $a \in IR$ f est strictement décroissante alors (u_n) est décroissante à partir du premier entier supérieur ou égal à a.

III. Convergence d'une suite.

1. Convergence et divergence.

Déf :

On dit que la suite $(U_n)_{n \geq no}$ converge vers un réel L lorsque n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient également tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.
On dit dans ce cas que la suite est convergente.

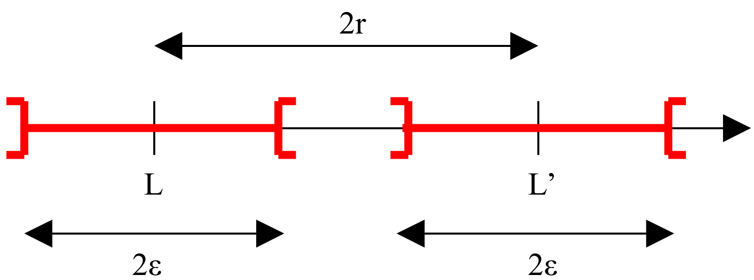


Th :

Si $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente alors il existe un unique réel L vers lequel elle converge. L est la limite de $(U_n)_{n\geq 0}$ et on note $\lim U_n = L$.

Dém :

- Supposons qu'uns suite (Un) converge vers deux réels différents L et L'.
- Soit r=$\left|\dfrac{L+L'}{2}\right|$. Sur l'axe des réels, r et la moitié de la distance entre L et L'.
- Soit ε un réel positif strictement inférieur à r.



- Puisque (Un) converge vers L, l'intervalle]L-ε,L+ε[contient tous les termes de (Un) à partir d'un certain rang.
- Puisque (Un) converge vers L', l'intervalle]L'-ε,L'+ε[contient tous les termes de (Un) à partir d'un certain rang.

Or]L-ε,L+ε[et]L'-ε,L'+ε[sont deux intervalles d'intersection nulle : l'hypothèse de départ est donc fausse : (Un) ne peut pas converger vers deux réels différents.

CQFD

Rem :
Dire que $(U_n)_{n\geq no}$ converge vers L équivaut à dire que la suite $(U_n-L)_{n\geq no}$ converge vers 0.

Ex :

- les suites de termes générales $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}$ convergent vers 0.
- Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ telle que $U_n=2+\dfrac{1}{n}$.

  Puisque la suite $(U_n-2)_{n\geq 0}$ converge vers 0, $(U_n)_{n\geq 0}$ converge vers 2.

Déf :

- Une suite qui ne converge pas est dite divergente.
- Si tout intervalle ouvert du type]a;+oo[contient tous les termes d'une suite divergente à partir d'un certain rang p, alors cette suite admet pour limite +oo et on note $\lim U_n = +\infty$.
- Si tout intervalle ouvert du type]-oo ;a[contient tous les termes d'une suite divergente à partir d'un certain rang p, alors cette suite admet pour limite -oo et on note $\lim U_n = -\infty$.

Rem :
Certaine suite diverge ni vers +oo ni vers -oo.

Ex :

- les suites de terme général $\sqrt{n}, n, n^2$ admettent pour limite +oo.
- La suite (Un) définie par $U_n=(-1)^n$ n'a pas de limite car ses termes vallent 1 ou -1 alternativement.

2. Premiers critères de convergences.

Suites Arithmétiques :

- Toute suite arithmétique de raison r>0 diverge vers +oo.
- Toute suite arithmétique de raison r<0 diverge vers -oo.

Suites géométriques :

Soit q un réel non nul :

- Si $-1<q<1$ alors q^n converge vers 0.
- Si $q>1$ alors q^n diverge vers +oo.
- Si $q=1$ alors q^n est constant est égal à 1.
- Si $q\leq-1$ alors q^n diverge et n'a pas de limite.