Probabilités conditionnelles

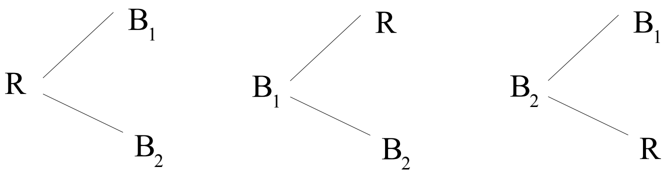
Dans toute la leçon, Ω désigne un univers dont p est une une loi de probabilité. E et F sont deux événements de Ω.

I. Probabilités conditionnelles.

1. Définition.

Ex :

Dans une urne, il y a 3 boules indiscernables au touché, deux bleues et une rouge. On en tire successivement 2 sans remise.
Ω est représenté par l'arbre ci-dessous :



Soit E= « la première bille est rouge ».

Soit F= « la seconde bille est bleue ».

Il est facile de voir que p(E)= $\frac{1}{3}$, p(F)= $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ et $p(E\cap F)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Si on sait que la première bille est rouge, il ne reste plus que des billes bleues. La probabilité de F sachant que E est réalisé est alors de 1 : cela revient à changer l'univers de l'expérience : Ω devient Ω'={B;B}.

Déf :

Si $p(E)\neq 0$, on appelle probabilité de F sachant E le réel $p_E(F)=\frac{p(E\cap F)}{p(E)}$.

Ex :

En reprenant l'exemple précédent :

$p_E(F)=\frac{p(E\cap F)}{p(E)}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{1}=1$.

Prop :

La probabilité sachant E, si $p(E)\neq 0$, est une loi de probabilité sur E appelée loi de probabilité conditionnelle.

Dém :

Soit x un élément de F :

- si $x \in E$ alors $p_E(x)=\frac{p(x\cap E)}{p(E)}=\frac{p(x)}{p(E)}\in[0;1]$
- si $x \notin E$ alors $p_E(x)=\frac{p(x\cap E)}{p(E)}=\frac{p(\emptyset)}{p(E)}=0$

Ainsi, $\sum_{x\in F} p_E(x)=\sum_{x\in E} p_E(x)=\sum_{x\in E}\frac{p(x)}{p(E)}=\frac{1}{p(E)}\times\sum_{x\in E} p(x)=\frac{1}{p(E)}\times p(E)=1$.

CQFD

Conséquences directes :

- $p_E(F)=1-p_E(\bar{F})$
- $p_E(E)=1$
- Si E et F sont incompatibles $p_E(F)=0$

II. Evénements indépendants.

Déf :

On dit que E et F sont indépendants si et seulement si $p(E\cap F)=p(E)\times p(F)$.

Ex :

En reprenant l'expérience du I.1. On se demande si E et F sont indépendants.

On sait p(E)= $\frac{1}{3}$, p(F)= $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ et $p(E\cap F)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ donc $p(E\cap F)\neq p(E)\times p(F)$: E et F ne sont pas indépendants.

Prop :

Si p(E)<>0 et p(F) <>0 alors :

- E et F sont indépendants si et seulement si $p_E(F)=p(F)$
- E et F sont indépendants si et seulement si $p_F(E)=p(E)$

Dém :

Il suffit de prendre la définition ci-dessus et celle de $p_E(F)$ puis celle de $p_F(E)$.

Rem :

E et F sont indépendants si et seulement si la réussite (ou l'échec) de E n'influe pas sur la réussite (ou l'échec) de F

Ex :

Toujours avec la même expérience, soit A= « les deux billes sont de la même couleur » et B= »la première bille est bleue ». Sont-ils indépendants ?

- L'arbre du I. nous apprends que p(A)= $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
- Si B est déjà réalisé, il ne reste qu'une bille rouge et une bleue donc $p_B(A)=\frac{1}{2}$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

III. Variables aléatoires indépendantes.

Déf :

Soit X une variable aléatoire qui prend $\{x_1;...;x_p\}$ pour valeurs.

Soit Y une variable aléatoire qui prend $\{y_1;...;y_q\}$ pour valeurs.

X est Y sont indépendantes si et seulement si , pour tout $i\in\{x_1;...;x_p\}$ et tout $j\in\{y_1;...;y_q\}$ on a : $p(«X=i»\cap«Y=j»)=p(«X=i»)\times p(«Y=j»)$.

Ex :

Mr et Mme brioche achètent parfois du pain en rentrant chez eux le soir. Mr brioche avec une probabilité de 0,6 et Mme brioche avec une probabilité de 0,3. X détermine le nombre de pain acheté par Mr brioche et Y e nombre de pain acheté par Mme brioche .

On a :

- p(« X=0 »)=0,4 et p(« X=1 »)=0,6
- p(« Y=0 »)=0,7 et p(« Y1 »)=0,3

On donne le tableau d'intersection ci-dessous :

Intersection	***X=0***	***X=1***
Y=0	0,28	0,42
Y=1	0,12	0,18

- $p(« X=0 » \cap « Y=0 »)=p(« X=0 »)\times p(« Y=0 »)$.
- $p(« X=0 » \cap « Y=1 »)=p(« X=0 »)\times p(« Y=1 »)$.
- $p(« X=1 » \cap « Y=0 »)=p(« X=1 »)\times p(« Y=0 »)$.
- $p(« X=1 » \cap « Y=1 »)=p(« X=1 »)\times p(« Y=1 »)$.

Les variables X et Y sont donc indépendantes : il n'y a pas de consultation dans le couple quant à l'achat du pain le soir.

IV. Partitions.

Définition :

Soit n un entier avec n>1. Les événements $E_1,\dots,E_n$ forment une partition de Ω si les trois conditions ci-dessous sont vérifiées :

- pour tout i $\in$ {1,...,n}, $E_i \neq 0$
- pour tout i $\in$ {1,...,n} et tout j $\in$ {1,...,n} avec $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$.
- $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = \Omega$.

Prop : formule de probabilité totale.

Soit $E_1,\dots,E_n$ une partition de Ω et F un événement de probabilité non nulle alors :

$$p(F)=p_{E_1}(F)\times p(E_1)+p_{E_2}(F)\times p(E_2)+\dots+p_{E_n}(F)\times p(E_n)$$

Dém :

F= $(F\cap E_1)\cup(F\cap E_2)\cup\dots\cup(F\cap E_n)$

$E_1,\dots,E_n$ étant deux à deux d'intersection nulle, il en va de même pour $F\cap E_1$, $F\cap E_2$ ...

Ainsi p(F)= $p(F\cap E_1)+p(F\cap E_2)+\dots+p(F\cap E_n)$

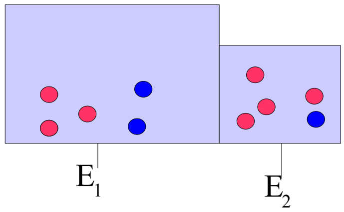
Or pour tout i $\in$ {1,...,n}, $p(F\cap E_i)=p_{E_i}(F)\times p(E_i)$.

On remplace et le tour est joué...

CQFD

Ex :

On a deux urnes : une grosse qui contient 3 boules rouges et deux bleues et une petite qui contient 4 boules rouges et deux une seule bleue. On doit au hasard choisir une urne puis tire une boule, toutes les boules étant indiscernables au touché.



La probabilité de choisir la grosse urne est de $\frac{2}{3}$ et, donc, celle de choisir la petite est de $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité de l'événement F= « la bille tirée est bleue » ?

Soit E_1 l'événement « on choisis une bille dans la grande urne » et E_2 l'événement « on choisis une bille dans la petite urne ».

$p_{E_1}(F)=\frac{2}{5}$ et $p_{E_2}(F)=\frac{1}{5}$

E_1 et E_2 forment une partition. Ainsi :

p(F)= $p_{E_1}(F)\times p(E_1)+p_{E_2}(F)\times p(E_2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{15}+\frac{1}{15}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

V. Expériences répétées

Définition / propriété :

Lors de la répétition d'expériences aléatoires, on dit qu'elles sont indépendantes si le résultat de l'une n'influence pas celle des autres.

Dans ce cas, la probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chaque résultats.

Ex:

On jette 3 fois un dé. Quelle est la probabilité de E= « obtenir trois faces no6 à la suite » ?

Chaque expérience est indépendante, la probabilité d'obtenir un 6 est de $\frac{1}{6}$ donc la probabilité de E est $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$

Rem :

Dans le cas d'un tirage avec remise, les expériences seront indépendantes. Mais ce n'est pas le cas du tirage sans remise puisque qu'une possibilité sera absente du second tirage qui sera alors influencé par le premier.