# Primitives

## I. Déf.

Déf :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I⊂R. Dire qu'une fonction F est une primitive de f sur I signifie que :

- F est dérivable sur I.
- Pour tout x∈I, F'(x)=f(x)

Ex :

Soit $f(x)=x^2$ et $F(x)=\frac{1}{3}x^3$.

F est dérivable sur R et F'(x)=f(x) pour tout x∈R : F est une primitive de f sur R .

## II. Théorèmes

Th1 (admis) :

Toute fonction continue sur un intervalle I⊂R admet des primitives sur I.

Th2 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I⊂R. Si F est une primitive de f sur I alors toute primitive de f sur I est du genre G(x)=F(x)+k où k∈R.

Dém :

Soit F et G deux primitives de f sur I. Alors, pour tout x∈I,
F'(x)=f(x) et G'(x)=f(x)

Donc F'(x)=G'(x).
Donc F'(x)-G'(x)=0.
D'où (F(x)-G(x))'=0

Ainsi F(x)-G(x) est une constante k∈R. CQFD.

Th 3 :

Soit f continue sur un intervalle I⊂R. Soit $x_0$∈R et $y_0$∈R.
Alors il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0)=y_0$.

Dém :

Soit G une primitive de f sur I. Tout autre primitive F de f sur I est du genre F(x)=G(x)+k où k∈R.

Pour avoir $F(x_0)=y_0$ il faut et il suffit d'avoir $k=y_0-G(x_0)$ : k existe et est unique donc il en va de même pour F.

CQFD

## III. Primitives usuelles.

Dans les deux tableaux ci-dessous, k désigne une constante réelle.

### Tableau No 1

| f | Primitive F de f | Sur I= |
|---|---|---|
| c où c€R | $Cx+k$ | R |
| $x^n$ où n€N* | $\frac{1}{n}x^{n+1}+k$ | R |
| $\frac{1}{x^n}$ où n€N et n>1 | $\frac{-1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+k$ | R* |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x}+k$ | R+* |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)+k$ | R |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)+k$ | R |
| $1+\tan^2 x$ ou $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)+k$ | R-$\left\{\frac{\pm\pi}{2}+n\pi\right\}$ où n€N |

Dém : Il suffit de dériver la primitive.

### Tableau No 2

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle IcR.

| Fonction f | Primitive F de f |
|---|---|
| cu' où c€R | cu+k |
| u'+v' | u+v+k |
| $u'u^n$ avec n€N* | $\frac{1}{n+1}u^{n+1}+k$ |
| $\frac{u'}{u^n}$ avec n€N et n>1 | $\frac{-1}{n-1}\frac{1}{u^{n-1}}+k$ |
| $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u}+k$ |
| $u'\times v'ou$ où vou dérivable sur I | vou+k |

Dém : Il suffit de dériver la primitive.

### Ex 1 :

Soit f(x)=$3x^4-x^3+3x^2-4x+1$

- f est continue sur R donc admet des primitives sur R.
- $F(x)=3\times\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+3\times\frac{1}{3}x^3-4\times\frac{1}{2}x^2+x+k$ k€R.

D'où $F(x)=\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+x^3-2x^2+x+k$ k€R.

### Ex 2 :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{(2x+8)^2}$ .

- f est continue sur R-{-4} donc admet des primitives sur R-{-4}.
- $f(x) = \dfrac{1}{(2x+8)^2} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 2}{(2x+8)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$ où $u(x) = 2x+8$

D'où $F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-1}{2-1}\dfrac{1}{2x+8} = \dfrac{-1}{2} \times \dfrac{1}{2x+8} = \dfrac{-1}{4x+16}$

## Ex 3 :

Soit $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}$ continue sur ]0 ;+oo[

$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ avec u(x)=$x^3$+x.

D'où $F(x) = 2\sqrt{x^3+x} + k$ avec k€R.

## Ex 4 :

Soit f(x)=cos(6x)-3sin(4x).

- f est continue sur R donc admet des primitives sur R.
- cos(6x) est la composée de u(x)=6x suivie de v(x)=cos(x)
- sin(4x) est la composée de u(x)=4x suivie de v(x)=sin(x)
- $F(x) = \dfrac{1}{6}\sin(6x) + \dfrac{3}{4}\cos(4x)$ +k , k€R.

## Ex 5 :

$f(x) = \cos^2(x)$

- f est continue sur R donc admet des primitives sur R.

- On transforme $\cos^2(x)$ grâce à l'égalité $\cos(2x)=2\cos^2(x)-1$.

  D'où $\cos^2(x)=\dfrac{\cos(2x)+1}{2}$

- F(x)=$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\sin(2x) + x\right) + k, k \in R.$

  Soit $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{2}x + k, k \in R.$