Nombres complexes. Part 1.

I. Définition.

1. Définition.

Déf:
On admet qu'il existe un ensemble $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{R}$ ainsi qu'un nombre noté i tel que $i^2=-1$ et qui est composé d'éléments pouvant s'écrire de manière unique sous la forme a+ib où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ est appelé ensemble des nombres complexes.

Ex:
z=2+3i, z'=0+3i et z''=3+0i sont des nombres complexes.

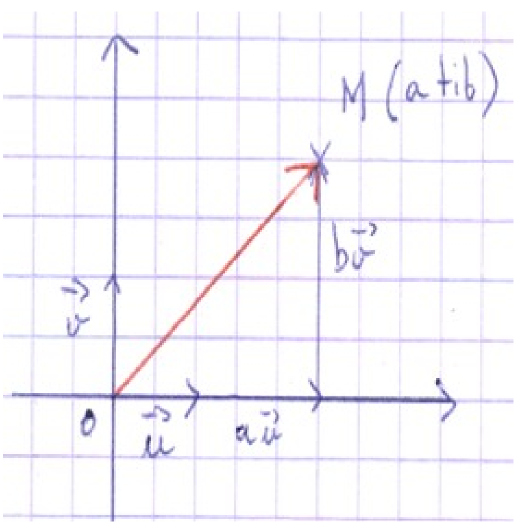
Conséquence directe:
Soit z=a+ib où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, et z'=a'+ib' où $a'\in\mathbb{R}$ et $b'\in\mathbb{R}$.
z=z' si et seulement si a=a' et b=b'.

Déf:
Soit z=a+ib, où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. a est appelé partie réelle de z et b partie imaginaire de z. On note a= Re(z) et b=Im(z).
Si Im(z)=0, on dit que z est un réel.
Si Re(z)=0, on dit que z est un imaginaire pur.

Ex:
2 est un réel, 3i est un imaginaire pur.

Déf:
Soit z=a+ib, où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. On appelle conjugué de z, le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$.
On remarque que $z+\bar{z}=2a$ et $z-\bar{z}=2ib$.

2.Repère complexe.



Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct. Soit M un point du plan. Nous savons qu'il existe un unique couple de réels (a;b) tel que tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

On dit que M a pour affixe z=a+ib dans le repère complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$ et on note M(z).

L'axe $(O;\vec{u})$ est appelé ***axe des réels*** car les points de cet axe sont ceux qui ont des affixes réels.

L'axe $(O;\vec{v})$ est appelé ***axe des imaginaires purs*** car les points de cet axe sont ceux qui ont des affixes imaginaires purs.

Dém: Démontrons que M ne peut avoir deux affixes différentes.

Supposons M(a+ib) et M(a'+ib') où a,b,a', et b' sont des réels.

Alors, $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Donc $a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$.

D'où $(a - a')\vec{u} = (b' - b)\vec{v}$.

Comme $(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont ni colinéaires ni nuls. Par conséquent a-a'=0 et b-b'=0.

II. Opérations et nombres complexes.

1. Les opérations de base.

Prop:
On admet que $\mathbb{C}$ est muni d'une addition «+» et d'une multiplication «x» qui possèdent les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ avec $i^2=-1$.

Ex: Soit z=2+3i et z'=-3+2i.

- $z+z'=(2+3i)+(-3+2i)=2+3i-3+2i=-1+5i$.
- $z-z'=(2+3i)-(-3+2i)=2+3i+3-2i=5+i$.
- $z\times z'=(2+3i)(-3+2i)=-6+4i-9i+6i^2=6+4i-9i+6\times(-1)=-6+4i-9i-6=-12-5i$.
- $\frac{z}{z'} = \frac{2+3i}{-3+2i}$

$$= \frac{2+3i}{-3+2i} \times \frac{-3-2i}{-3-2i}$$ (On fait apparaître $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ au dénominateur)

$$= \frac{-6-4i-9i-6i^2}{(-3)^2-(2i)^2}$$

$$= \frac{-6-13i+6}{9+4}$$

$$= \frac{-13i}{13}$$

$$= -i$$

Rem :

Tous les résultats sont des nombres complexes et se mettent donc sous la forme z=a+ib, où a∈ ℝ et b∈ ℝ .

Prop:

Soit z=a+ib, où a∈ ℝ et b∈ ℝ . Si z≠0 alors $\frac{1}{z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$.

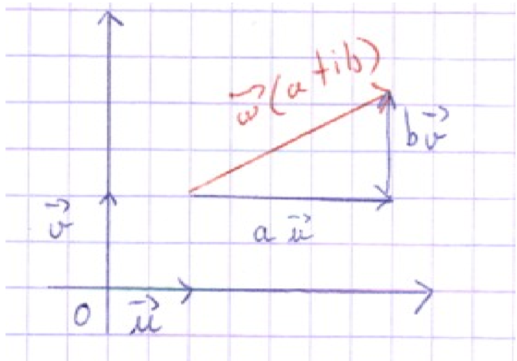
Dém:

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{(a-ib)}{(a+i)(a-ib)}=\frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

CQFD.

2. Application.

Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct. Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan. Nous savons qu'il existe un unique couple de réels (a;b) tel que $\vec{w}=a\vec{u}+b\vec{v}$.



On dit que $\vec{w}$ a pour affixe z=a+ib dans le repère complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$ et on note $\vec{w}$(z).

Dém:

Pour l'unicité de la décomposition, c'est la même démonstration qu'au 1.

Conséquence directe:

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.

Propriétés:

Soit z_A et z_B deux nombres complexes et soit A(z_A) et B(z_B) dans $(O;\vec{u},\vec{v})$,un repère orthonormé direct. Alors:

- $z_A=-z_B$ si et seulement si A et B sont symétriques par rapport à O.
- $z_A=\overline{z_B}$ si et seulement si A et B sont symétriques par rapport à l'axe des réels.
- $\overrightarrow{OA}(z_A),\overrightarrow{OB}(z_B)$.
- $\overrightarrow{AB}(z_B-z_A)$
- $\frac{z_A+z_B}{2}$ est l'affixe du milieu I de [AB].
- Posons z_A =a+bi et z_B =a'+bi où a,b,a' et b' sont des réels. Nous savons déjà depuis la troisième et les repères du plan que $AB=\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2}$.

Dém:

- Les symétries sont évidentes sur un simple dessin :

- $\overrightarrow{OA}(z_A), \overrightarrow{OB}(z_B)$ est une application de la définition du II.

- Affixe de $\overrightarrow{AB}$:

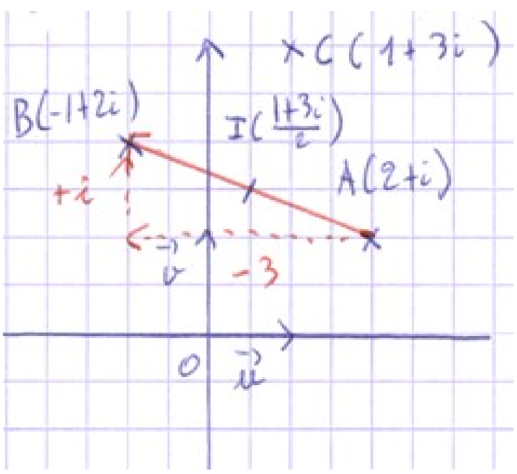
  Posons z_A=a+bi et z_B=a'+bi où a,b,a' et b' sont des réels.

  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} =$ -(a$\vec{u}$ +b$\vec{v}$)+ a'$\vec{u}$ +b'$\vec{v}$ =(a'-a) $\vec{u}$ +(b'-b) $\vec{v}$

  Or z_B-z_A=(a'-a)+(b'-b)i. Par consequent $\overrightarrow{AB}(z_B - z_A)$.

- I(z_I) est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
  C'est-à-dire si et seulement si z_I-z_A=z_B-z_I.
  C'est-à-dire si et seulement si 2z=z_A+z_B.
  C'est-à-dire si et seulement si z_I= $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Ex :



Soit A(2+i), B(-1+2i) dans $(O;\vec{u},\vec{v})$,un repère orthonormé direct.

- $\overrightarrow{AB}(-1+2i-(2+i))$ soit $\overrightarrow{AB}(-3+i)$
- $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$
- OACB parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ c'est à dire si et seulement si $2+i=z_c+1-2i$. Il vient $z_c=1+3i$.
- Le milieu de [AB] est I($\dfrac{-1+2i+2+i}{2}$) c'est-à-dire I($\dfrac{1+3i}{2}$).

IV. Equation du second degré dans C.

Prop:

Soit a,b et c trois réels (a≠0). Soit az²+b²+c=0 une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.
Soit Δ=b²-4ac. Alors:

- Si Δ>0, l'équation admet deux solutions réels: $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si Δ=0, l'équation admet une solution réelle double: $z_2 = z_1 = \frac{-b}{2a}$.
- Si Δ<0, l'équation admet deux solutions complexes: $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
-

Dém:

La forme canonique de az²+bz+c est $a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ (Vu en 1ère S).

- Si Δ=0, l'équation $a(z+\frac{b}{2a})(z+\frac{b}{2a})$ admet une solution réelle double: $z_2 = z_1 = \frac{-b}{2a}$.
- Si Δ>0, on factorise grâce à l'identité remarquable «a²-b²=(a+b)(a-b)»et on doit alors résoudre: $a\left(z-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$. D'où le résultat.
- Si Δ<0. On remarque que $\left(i\sqrt{\Delta}\right)^2 = -\Delta$!! On factorise grâce à l'identité remarquable «a²-b²=(a+b)(a-b)» et on doit alors résoudre: $a\left(z-\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z-\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0$. D'où le résultat.

CQFD.

Ex:

Résoudre 2z²-6z+11=0.
Δ=(-6)²-4x11x2=36-88=-58 : Δ<0.

Il y a donc deux solutions:

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6+i\sqrt{58}}{4} = \frac{6+2i\sqrt{13}}{4} = \frac{3+i\sqrt{13}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-i\sqrt{58}}{4} = \frac{6-2i\sqrt{13}}{4} = \frac{3-i\sqrt{13}}{2}$$

Conséquence directe:

Si z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2+bz+c=0$ (avec a,b et c trois réels et $a\neq0$), alors $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$.

Ex:

$$2z^2-6z+11=2\left(z-\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right).$$