# Logarithme népérien.

## I. Définition, caractéristique et conséquences.

Rem :

La fonction inverse étant continue sur ]0;+oo[, elle admet des primitive sur cet intervalle.

Déf :

On appelle fonction logarithme, notée ln, la primitive de la fonction inverse sur ]0;+oo[ qui s'annule en 1 :

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ .

Equation caractéristique :

Tout fonction définie pout tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ et vérifiant $f(a\times b)=f(a)+f(b)$ pour tout a et b de ]0;+oo[ est du genre f(x)=kln(x) où k est une constante réelle et réciproquement.

Dém :

- **Sens direct** : pour tout $a\in\mathbb{R}^{+*}$ , et tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ , $f(a\times x)=f(a)+f(x)$

En dérivant par rapport à x on obtient af'(ax)=f'(x),pour tout $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ .

Pour x=1, af'(a)=f'(1) pour tout $a\in\mathbb{R}^{+*}$ .

D'où,pour tout $a\in\mathbb{R}^{+*}$ ,f' est de la forme $f'(a)=k\times\frac{1}{a}$ et f est une primitive de la fonction $k\times\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ etk=f'(1).

Or f $(1)=f(1\times1)=f(1)+f(1)$ . Donc f(1)=0. Donc f est la primitive de $k\times\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

On en déduit, Ln(x) étant la primitive de $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, que f est de la forme f(x)=kln(x).

- **Réciproque**: Soit F(x)=ln(kx) pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$ et $k\in\mathbb{R}^{+*}$ .

On sait que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $F'(x)=k\times\frac{1}{kx}=\frac{1}{x}$ sur cet intervalle : f est donc une primitive de la fonction inverse.

F est donc de la forme F(x)=lnx+c avec $c \in \mathbb{R}$ . Or ln1=0. On en déduit c=F(1)=ln(k).
AinsiF(x)=ln(kx)=lnk+lnx pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $k \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Prop : pour tout a et b de ]0;+oo[ :

- ln(ab)=lna + lnb
- $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$
- $\ln(\frac{a}{b}) = lna - lnb$
- $\ln(a^n) = nlna$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $\ln(\sqrt{(a)}) = \frac{1}{2} lna$

Dém :

- Ln (ab)=lna + lnb découle directement de l'équation caractéristique.
- $\ln(b \times \frac{1}{b}) = \ln(1) = 0$

  Ainsi, $lnb \times \ln(\frac{1}{b}) = 1$ et ln $b = -\ln(\frac{1}{b})$ .
- Pour $\ln a^n$ , on procède par récurrence.

  * Pour n=0, on a bien $\ln a^0 = ln1 = 0 = 0\mathrm{lna}$

  * Supposons qu'il existe n in setn tel que $\ln(a^n) = nlna$ .

    $\ln a^{n+1} = \ln(a^n \times a) = \ln a^n + lna = nlna + lna = (n+1) lna$ : la propriété devient vraie au rang n+1

  * Par récurrence, $\ln(a^n) = nlna$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

* $\ln a = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ \ln\sqrt{(a)}$ .

  d'où $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} lna$ .

## II. Etude de la fonction ln.

### 1. Variation.

Prop :

La fonction logarithme est continue et dérivable sur ]0;+oo[ et sur cet intervalle (ln(x)')=1 over x. Ainsi la fonction logarithme est croissante strictement sur ]0;+oo[.

## Conséquences :

Pour tout a et b dans ]0;+oo[,

- ln(a)=ln(b) si et seulement si a=b
- ln(a)<ln(b) si et seulement si a<b
- ln(a)>ln(b) si et seulement si a>b

### 2. Limite en $0^+$et +oo.

**Prop:**

$\lim_{x\to 0^+} lnx=-\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} lnx=+\infty$ .

**Dém :**

### 3. Comparaison en $0^+$ et +oo.

**Prop :**

Pour tout entier naturel n , $\lim_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^n}=0$ et $\lim_{x\to 0^+} x^n lnx=0$

**Dém :**

- Soit $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$ .

f est dérivable sur ]0;+oo[ et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$ .

D'où le tableau ci-dessous :

| x | 0 | | 4 | | +oo |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | ‖ | - | | + | |
| f | ‖ | ↘ | 2-ln4 | ↗ | |

Or 2-ln4>0 donc f(x) est positif strictement sur ]0;+oo[ et sur cet interavalle, $lnx<\sqrt{x}$ .

- Pour tout x>1, et tout $n\in N^*$ , $x^n>\sqrt{x}$ donc $\frac{\ln x}{x^n}<\frac{\sqrt{x}}{x^n}$

  comme $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^n}=0$ , d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x^n}=0$

- Posons maintenant $X = \frac{1}{x}$ .

X tend vers 0 équivaut à x tend vers +oo donc

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^n} = \lim_{X \to 0^+} \frac{\ln(\frac{1}{X})}{(\frac{1}{X})^n} = \lim_{X \to 0^+} -\ln X \times X^n$$

## 4. Tangente en 1 et conséquence

f(x)=Ln x est dérivable sur ]0;+oo[ et f'(x)= $\frac{1}{x}$ .

La tangente à la courbe de f en 1 a pour équation :

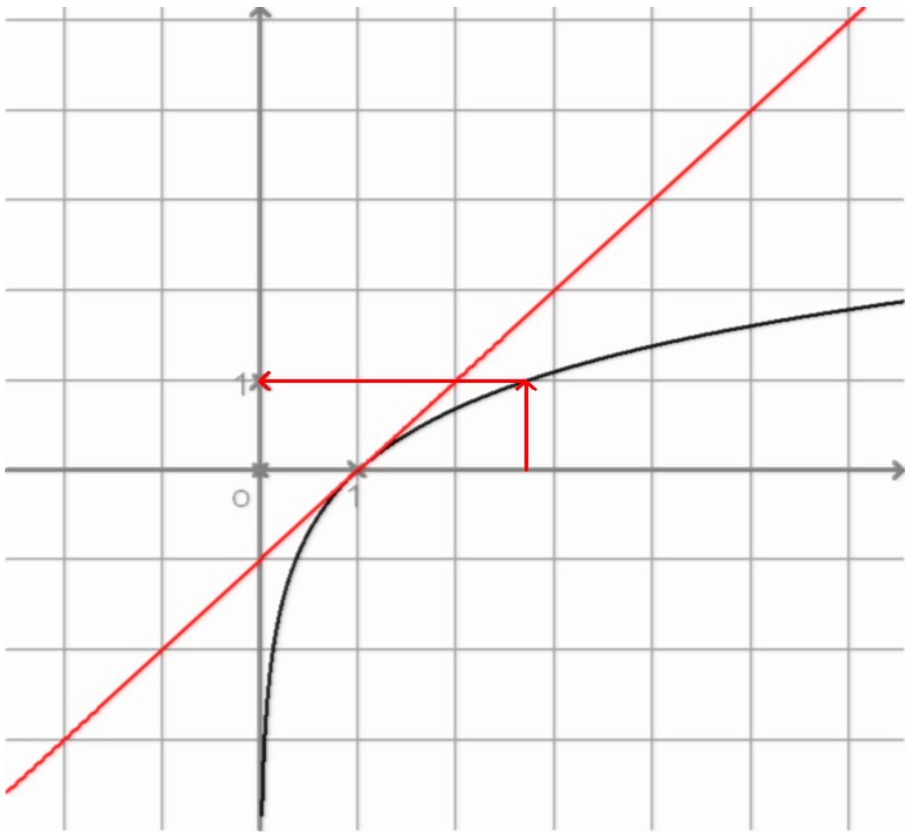
y=f'(1)(x-1)+f(1)

y=1(x-1)+0

y=x-1.

Par conséquent, $\lim_{x \to 1} \frac{lnx - \ln 1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1} = f'(1) = 1$

## 5. Courbe représentative.



## III. Dérivés et primitives

Prop :

Soit u une fonction dérivable sur I$\subset\mathbb{R}$ à valeurs dans ]0;+oo[. Alors f(x)=lnu(x) est dérivable sur ]0;+oo[ et $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

Prop :

Soit u une fonction continue sur I$\subset$R qui ne s'annule pas sur I. Alors, une primitive de $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I est $F(x)=\ln|u(x)|$ .

Dém :

Si u(x)>0 alors $F(x)=\ln|u(x)|=\ln(u(x)) \, et \, F'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=f(x)$

si u(x)<0 alors $F(x)=\ln|u(x)|=\ln(-u(x)) \, et \, F'(x)=\frac{-u'(x)}{-u(x)}=f(x)$

## IV. Lien avec exponentielle.

### 1. le lien.

Prop :

- Pour tout $m\in\mathbb{R}$ , lnx=m admet une et une seule solution qui est $e^m$ .
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$ , $lne^x=x$
- Pour tout x in ]0;+oo[, $e^{lnx}=x$

Dém :

- f(x)=lnx est continue et strictement monotone sur ]0;+oo[. Comme $\lim_{x\to0^+} lnx=-\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} lnx=+\infty$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $m\in\mathbb{R}$ , lnx=m admet une et une seule solution $x_m\in\mathbb{R}$ .
- Soit g la fonction qui a tout $m\in\mathbb{R}$ associe la solution de lnx=m.

  La courbe de g a pour équation y=g(x) avec x=lny. Ainsi la courbe de g est symétrique de la courbe de f par symétrie axiale d'axe (d) d'équation y=x.


(On remarque que g(0)=1)

Par conséquent, la courbe de g admet une tangente en tout point sur R. Cette tangente ne peut être vertiacale car f n'admet aucune tangent horizontale.

g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ .

- ln(g(x)) est donc dérivable sur setr et $\ln(g(x))'=g'\frac{(x)}{g}(x)$ .

or ln(g(x)=x donc $\frac{g'(x)}{g(x)}=1$ .

On a ainsi : $\begin{cases} g'=g \\ g(0)=1 \end{cases}$ c'est la caractéristation de la fonction exponentielle : $g(x)=e^x$ .

## V. Puissances réelles.

## 1. Déf.

Déf :

Pour tout $a \in ]0+oo[$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $a^x = e^{xlna}$ .

Prop :

Cette définition est compatible avec les puissances entières et pour tout a et b de ]0;+oo[ et tout $x_1$ et $x_2$ de $\mathbb{R}$ , on a :

$$a^{x_1} \times a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$
$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$
$$a^{x_1} \times b^{x_1} = (ab)^{x_1}$$
$$(a^{x1})^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

Dém :

- Si $x \in \mathbb{N}, e^{xlna} = e^{lna^x} = a^x.$
- Pour les formules c'est toujours le même principe : on remplace $a^x$ par $e^{xlna}$ , on applique les règles de calculs de la fonction exponentielles puis on revient à une notation en $a^x$ .

$$a^{x_1} \times a^{x_2} = e^{x_1 \, lna} \times e^{x_2 \, lna} = e^{x_1 \, lna + x_2 \, lna} = e^{(x_1 + x_2) \ln a} = a^{x_1 + x_2}$$

## 2. Exponentielle de base a

Déf :

Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ . La fonction f qui a tout $x \in \mathbb{R}$ associe $a^x$ est un e exponentielle de base a telle que :

- Si $a \in ]0;1[$ , f est décroissante de +oo à $0^+$
- Si a=1, la fonction est constant égale à 1.
- Si $a \in ]1;+oo[$ , f est croissante de $0^+$ à +oo.

Dém :

$f(x)=e^{x\times \ln a}$

Posons X=x lna.

- Si , $a\in]1;+oo[$ , x tend vers +oo équivaut à X tend vers -oo et x tend vers -oo équivaut à X tend vers -oo. D'où :

  $\lim_{x\to+oo} f=\lim_{X\to+oo} e^x=+oo$ et $\lim_{x\to-oo} f=\lim_{X\to-oo} e^x=0^+$

- Si , x $a\in]0;1[$ , x tend vers +oo équivaut à X tend vers -oo et x tend vers -oo équivaut à X tend vers +oo. D'où :

  $\lim_{x\to+oo} f=\lim_{X\to-oo} e^x=0^+$ et $\lim_{x\to-oo} f=\lim_{X\to+oo} e^x=+oo$ .

- f est dérivable sur IR et $f'(x)=\ln a\, e^{x\ln a}$ .

  Donc, si $a\in]0;1[$ , lna<0 et f'(x)<0 et si $a\in]1;+oo[$ , lna>0 et f'(x)>0.