Limites et fonctions.

I. Limites en +∞ et -∞ d'une fonction- Asymptotes.

1. Limite finie.

a. Définitions.

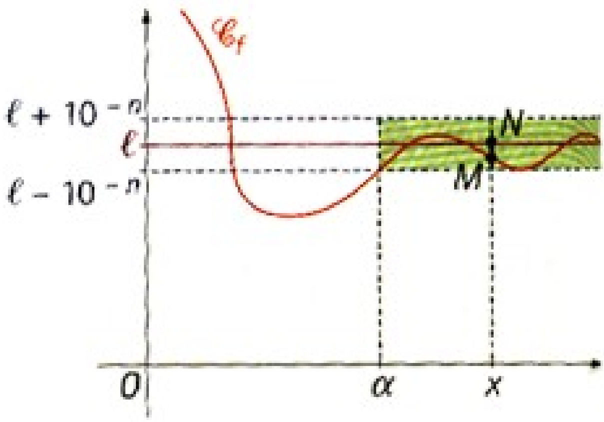
- Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[.

Dire que f(x) tend vers l lorsque x tend vers +∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est assez grand. On écrit : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{+\infty} f = l$.

- Soit f une fonction définie sur]-∞ ;a]

Dire que f(x) tend vers l lorsque x tend vers -∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est assez petit. On écrit : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{-\infty} f = l$.

Exemple :



Voici la courbe représentative d'une fonction f.
La distance entre f(x) et l est MN=$\lfloor f(x) - l \rfloor$.
MN peut être rendue aussi petite que l'on veut lorsque x devient assez grand.

Remarques :

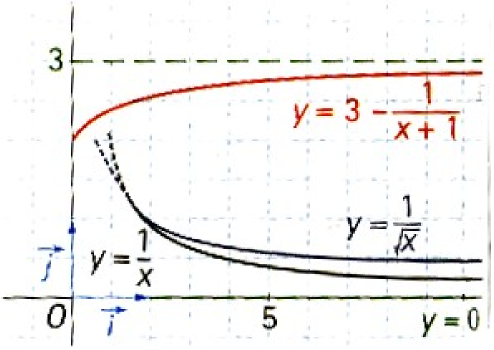
Si la fonction tend vers l en restant supérieure à l, on dit qu'elle tend vers l^+.De même, si la fonction tend vers l en restant inférieure à l, on dit qu'elle tend vers l^-.

Limites à connaître :

- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0^+ en +∞.
- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ (avec n pair) et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0^+ en -∞.
- Les fonctions $\frac{1}{x^n}$ (avec n impair) ont pour limite 0^- en -∞.

b. Asymptote horizontale.

- Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[.Si $\lim\limits_{+oo} f = l$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation y=l en +∞.



- La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ admet y=0 comme asymptote en +∞.
- La fonction g(x)=$3 - \frac{1}{x+1}$ admet y=3 comme asymptote en +∞.

Remarques :

On peut poser les mêmes définitions lorsque x tend vers -∞ et f est définie sur]-∞ ;a].

2. Limite infinie.

a. Définition.

Déf :

Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[avec a€R.

- Dire que f(x) tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞ signifie que tout intervalle ouvert du type]M ;+oo[contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est assez grand.. On écrit : $\lim\limits_{x->+oo} f(x) = +oo$ ou $\lim\limits_{+oo} f = +oo$.

- Dire que f(x) tend vers -∞ lorsque x tend vers +∞ signifie que tout intervalle ouvert du type]-oo;m[contient toutes les valeurs de f(x)dès que x est assez grand. On écrit : $\lim\limits_{x->+oo} f(x) = -oo$ ou $\lim\limits_{+oo} f = -oo$.

Remarque:

On peut poser les mêmes définitions lorsque x tend vers -∞ et f est définie sur]-∞ ;a].

Limites à connaître :

$\lim\limits_{x->+oo} \sqrt{x} = +oo$ $\lim\limits_{x->+oo} -\sqrt{x} = -oo$ $\lim\limits_{x->+oo} x^n = +oo$ $\lim\limits_{x->+oo} -x^n = -oo$

Si a>0 alors $\lim\limits_{x->+oo} ax+b = +oo$ mais si a<0, $\lim\limits_{x->+oo} ax+b = -oo$.

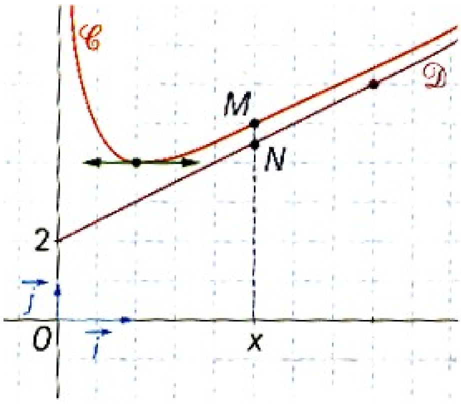
Si n est pair, $\lim\limits_{x->-oo} x^n = +oo$ mais si n est impair, $\lim\limits_{x->-oo} x^n = -oo$.

b. Asymptote oblique..

Déf :

Soit f une fonction définie sur [a ;+∞[.Si $\lim\limits_{+\infty} f(x) - (mx + p) = 0$, alors la courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation y=mx+p en +∞.

Exemple :



Ci-contre, voici la représentation de f(x)= $x + 2 + \frac{1}{x}$.

f(x)-(x+2)= $\frac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) - (x + 2) = 0$ et y=x+2 est asymptote à la courbe de f en +∞.

Remarque : On peut poser les mêmes définitions lorsque x tend vers -∞ et f est définie sur]-∞ ;a].

c. Le cas des polynômes.

Prop : En **+oo et -oo**, la limite d'une fonction polynôme est égale à la limite du monôme de plus haut degré.

Ex : $\lim\limits_{+\infty} 2x^2 - 3x^3 + 2 = \lim\limits_{+\infty} -3x^3 = -\infty$

d. Le cas des fonctions rationnelles.

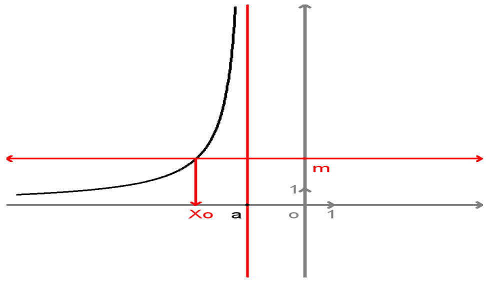
Prop: En **+oo et -oo**, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Ex : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{2x^2 - x + 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$

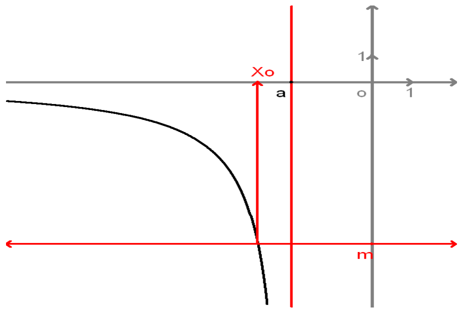
II. Limites infinies en un réel a.

Déf :

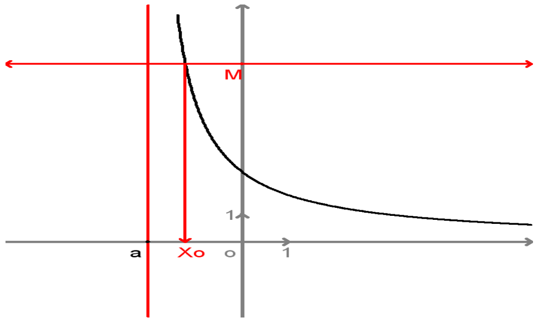
Soit IcIR et $a \in I$. Soit f une fonction définie sur I sauf en a.



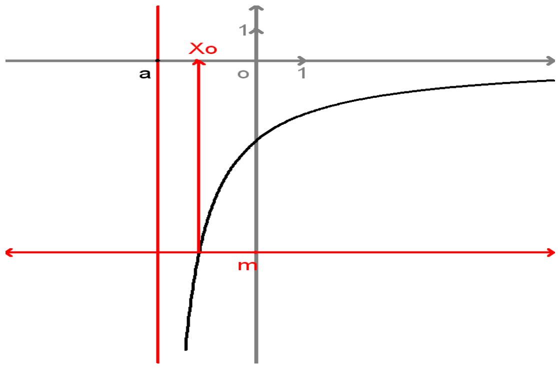
- On dit que f admet pour limite +oo lorsque x tend vers a par la gauche si et seulement si, pour tout $M \in IR^{+}$, il existe $x_o \in]-\infty ; a[$ tel que si $x \in]x_0 ; a[$ alors f(x)>M. On note alors $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$



- On dit que f admet pour limite -oo lorsque x tend vers a par la gauche si et seulement si, pour tout $m \in IR^{-}$, il existe $x_o \in]-\infty ; a[$ tel que si $x \in]x_0 ; a[$ alors f(x)<m. On note alors $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



- On dit que f admet pour limite +oo lorsque x tend vers a par la droite si et seulement si, pour tout $M \in IR^{+}$, il existe $x_o \in]a ; +\infty[$ tel que si $x \in]a ; x_0[$ alors f(x)>M.On note alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.



- On dit que f admet pour limite -oo lorsque x tend vers a par la droite si et seulement si, pour tout $m \in IR^{-}$, il existe $x_o \in]a ; +\infty[$ tel que si $x \in]a ; x_0[$ alors f(x)<m.On note alors $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

Déf :

Si une des deux limites (en a^{« - »} ou a^{« + »})est infinie alors la droite d'équation x=a est asymptote verticale à la courbe de f.

III. Opérations sur les limites.

Pour le III. ,l et l' désignent des réels. Les limites peuvent être celles de fonctions ou de suites.

Limite 1	l	+∞	-∞	+∞
Limite 2	l'	l' ou +∞	l' ou -∞	-∞
Limite 1+limite 2	l+l'	+∞	-∞	On ne peut pas conclure tout de suite

Limite 1	l	l >0 ou +∞	l<0 ou -∞	l >0 ou +∞	l<0 ou -∞	0
Limite 2	l'	+∞	+∞	-∞	-∞	+∞ ou -∞
Limite 1 x Limite 2	l×l'	+∞	-∞	-∞	+∞	On ne peut pas conclure tout de suite

Limite	l≠0	l=0⁺	l=0⁻	+∞ ou -∞
$\frac{1}{Limite}$	$\frac{1}{l}$	+∞	-∞	0

Limite 1	l	l	l≠0	±∞	±∞	0
Limite 2	l'≠0	±∞	0	0	l'≠0	0
$\frac{Limite1}{Limite2}$	$\frac{l}{l'}$	0	±∞ (suivant les signes)	±∞ (suivant les signes)	±∞ (suivant les signes)	On ne peut pas conclure tout de suite

Exemple : f(x)= $\frac{x^2-3}{\sqrt{x}}$. Df=]0 ;+∞[: Il y a deux limites à déterminer.

- <u>On veut trouver la limite de f en 0⁺ (à droite car f n'est pas définie si x<=0).</u>

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{0} x^2 = 0 \\ Lim\limits_{0} -3 = -3 \end{array}\right\} donc \lim\limits_{0} x^2 - 3 = 0 \\ \lim\limits_{0} \sqrt{x} = 0^+ \qquad donc \lim\limits_{0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +oo \end{array}\right\}$$

On ne peut conclure tout de suite : il faut lever cette indétermination de type 0×∞.

$$\lim_{0} \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \lim_{0} \frac{x^2\sqrt{x}}{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \lim_{0} x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Or , $\lim\limits_{0} x\sqrt{x} = 0$ et $\lim\limits_{0} -\frac{3}{\sqrt{x}} = -oo$ donc $\lim\limits_{0} f(x) = -oo$

- <u>On veut déterminer la limite de f en +∞.</u>

On a de nouveau une indétermination : $\frac{+oo}{+oo}$ si on ne modifie pas l'écriture de f.

$$\lim_{+oo} f(x) = \lim_{+oo} x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

Or $\lim\limits_{+oo} x\sqrt{x} = +oo$ et $\lim\limits_{+oo} -\frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ donc : $\lim\limits_{+oo} f(x) = +oo$.

IV. Limites et comparaisons.

1. Théorème des gendarmes.

a désigne un réels,+oo ou –oo, l est un réel.

Prop 1 :

Soit f, g et h trois fonctions telles que $g \leq f \leq h$.
Si $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = l.$

Dém :

Les deux propriétés se démontrent de la même façon. Démontrons la première pour a=+oo.
Soit I un intervalle ouvert contenant l.
$\lim_{+oo} g = l$ donc I contient tous les réels g(x) dès que x est supérieur à un réel A.
$\lim_{+oo} h = l$ donc I contient tous les réels h(x) dès que x est supérieur à un réel B..
Soit C le plus grand réel entre A et B : I contient tous les réels g(x) et h(x) dès que x est supérieur à C.
I contient donc également tous les réels f(x) puisque g(x)≤f(x) ≤h(x).

I pouvant être n'importe quel intervalle ouvert, on peut conclure que $\lim_{+oo} f = l$.

CQFD.

2. Autres comparaisons.

a désigne un réels,+oo ou –oo.

Prop :

Soit f, g et h trois fonctions telles que $g \leq f \leq h$.

- Si $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \to a} h(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

V. Limites et composée.

a,b et c désignent des réels,+oo ou –oo.

Prop :

Soit f=vou une fonction composée de deux fonction v et u.
Si $\lim_{x \to a} u(x) = b$ et que $\lim_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Ex :

Soit $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = vou(x)$ avec $\begin{cases} u(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{\sin x}{x} \end{cases}$. Cherchons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin(0)}{x - 0} = (\sin(0))' = \cos(0) = 1$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.