Intégration.

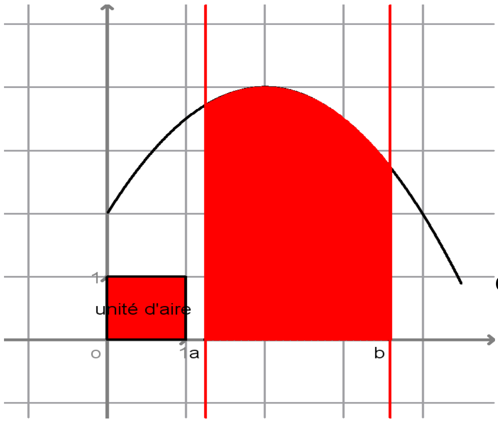
Dans toute la leçon, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

I. Intégrale et aire.

1. Fonction positive.

Déf :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a;b] de R. On appelle intégrale de a à b de f le réel noté $\int_a^b f(x)\,dx$ égal à l'aire (en unité d'aire) du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation y=a et y=b.



Rem :

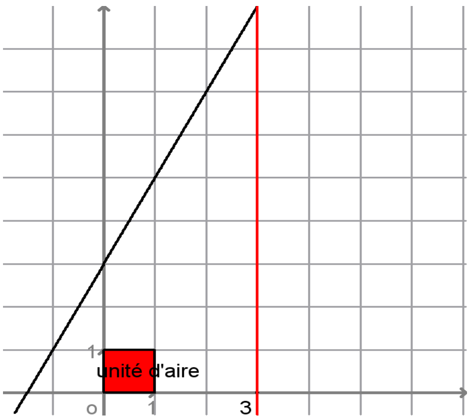
x est appelée variable muette et peu être remplacée par n'importe quelle variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(s)\,ds=...$$

Ex :

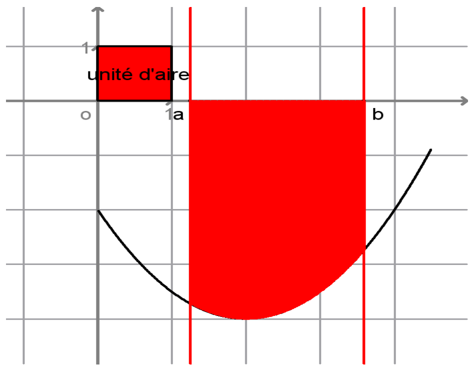
soit f(x)=2x+3.

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\frac{3+9}{2}\times 3=18.$$



2. Fonction négative et généralisation.

Déf :

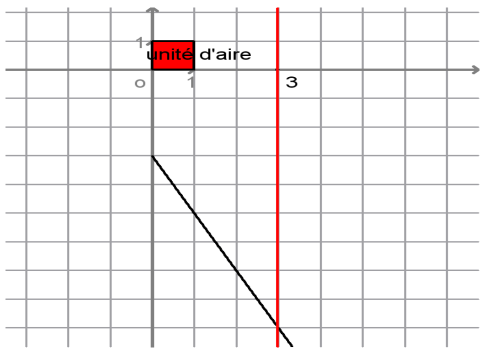


Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle [a;b] de R.

$\int_a^b f(x)\,dx$ égal à l'opposé de l'aire (en unité d'aire) du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation y=a et y=b.

Ex :

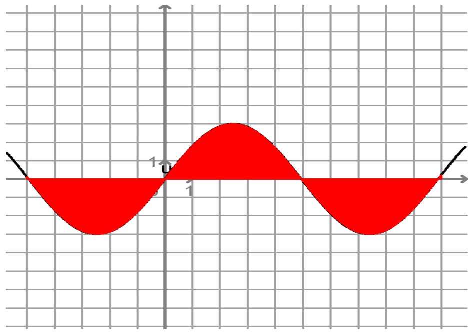
f(x)=-2x-3



$$\int_0^3 f(x)\,dx = -\frac{3+9}{2}\times 3 = -18.$$

Déf :

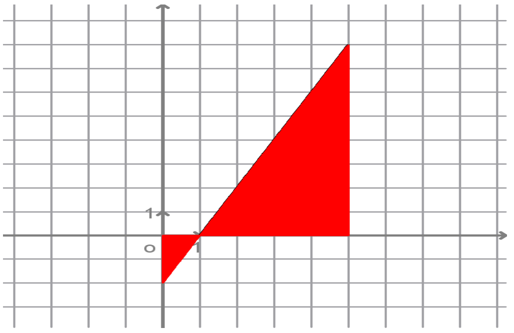
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b] de R et changeant de signe sur [a;b]. Soit le domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation y=a et y=b. Si A_1 est l'aire au dessus de l'axe des abscisses et A_2 l'aire en dessous de cet axe alors :



$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

Ex :

f(x)=2x-2



$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4\times 8}{2} - \frac{1\times 2}{2} = 15$$

3. Valeur moyenne.

Déf :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b] de R avec a<b. La valeur moyenne de f sur [a;b] est le réel $\mu=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$.

Le rectangle de dimensions b-a et μ a pour aire $\int_a^b f(x)dx$ donc $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \mu\, dx$.

II. Primitive et intégrale.

1. Théorème admis.

Th :

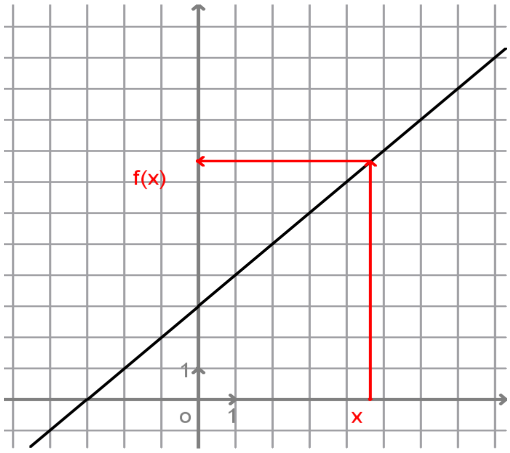
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de R. Soit $a\in I$. La fonction définie sur I par F(x)= $\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Ex :

L'unique primitive de f(x)=x+3 qui s'annule en 0 sur R est $\int_0^x f(t)dt$. Par définition de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^x f(x)dx=\frac{(3+f(x))\times x}{2}=\frac{(3+x+3)\times x}{2}=\frac{x^2}{2}+3x$$

$\frac{x^2}{2}+3x$ est bien l'unique primitive de f qui s'annule en 0 sur R



2. Calculer une intégrale.

Th :

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a;b] de R. Etant continue, f admet des primitives sur [a;b]. Soit F une de ces primitive. On a : $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

Rem :

On note aussi, $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$

Dém :

$\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Soit F une primitive de f. On sait que F(x)= $\int_a^x f(t)dt$ +k où k est une constante réelle.

F(b)-F(a)= $\int_a^b f(t)dt$ +k - $\int_a^a f(t)dt$ -k = $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$. CQFD

Ex :

Soit f(x)= $\frac{1}{x}$ sur]1;+oo[

Une primitive de f sur]1;+oo[est F(x)=lnx.

Ainsi, $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [lnx]_1^2 = ln2 - ln1 = ln2$

III.Propriétés de l'intégrale.

Dans toute cette partie, f et g désignent des fonctions continues sur I et a et b deux réels de I.

1. Signe

Prop :

Si f est positive sur [a;b] et $a \leqslant b$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est positive.

Si f est négative sur [a;b] et $a \leqslant b$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est négative.

Dém :

Par définition de l'intégrale.

2. Relation de Chasles.

Prop :

Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Dém :

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=F(c)-F(a)-(F(b)-F(c))=F(a)-F(b)=\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{CQFD}$$

Conséquence :

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

Dém :

On reprend la relation de Chasles avec c=b ...

3. Linéarité.

Prop :

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx$$

Dém :

Si F et G sont des primitives respectives de f et g alors F+G est une primitive de f+g.

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx=(F+G)(b)-(F+G)(a)=F(b)-F(a)+G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$$

4. Ordre et intégrale.

Prop :

Si $f\leqslant g$ sur [a;b] et $a\leqslant b$ alors $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$

Dém :

Comme $a\leqslant b$, si $f\leqslant g$ alors $f-g\leqslant 0$ et $\int_a^b (f-g)(x)\,dx\leqslant 0$.

Or $\int_a^b (f-g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$

Ainsi, $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$ CQFD

5. Inégalité de la moyenne.

Prop :

- Si $m \leqslant f \leqslant M$ sur [a;b] et $a \leqslant b$ alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.
- Si $|f| \leqslant M$ sur [a;b] alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M|b-a|$

Dém :

Première prop :

$m \leqslant f \leqslant M$ et $a \leqslant b$ donc $\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M\,dx$.

Or une primitive de m est mx et une primitive de M est Mx.

D'où : $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$

Deuxième prop :

$-M \leqslant f \leqslant M$. Il suffit de procéder comme ci-dessus dans le cas $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$.

IV. Intégration par partie.

Prop :

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur I et telles que u' et v' sont continues sur I alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx \quad .$$

Dém :

u et v étant dérivables sur I, uv l'est également et (uv)'=u'v+v'u.

u et v étant dérivables sur I, elles sont continues sur I et (uv)' également.

On a uv'=(uv)'-u'v et une primitive de (uv)' est uv donc :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=\int_a^b (uv)'(x)\,dx-\int_a^b (u'v)(x)\,dx=[uv]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$ CQFD.

Rem :

On utilise souvent l'intégration par partie pour calculer l'intégrale d'une fonction dont on ne connaît pas la primitive en particulier lorsqu'elle s'écrit sous la forme $P(x)\times lnx\,,P(x)\times e^x\,,P(x)\times\cos x\;ou\;P(x)\times sinx$ où P est un polynôme.

Ex :

$$\int_0^1 xe^x\,dx\ =?$$

On pose u(x)=x et $v'(x)=e^x$: u et v sont dérivables sur [0;1].

On a u'(x)=1 et $v(x)=e^x$: u' et v' sont continues sur [0;1].

Par intégration par partie, on a :

$$\int_0^1 xe^x\,dx=[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-[e^x]_0^1=e-(e-1)=1$$