Fonction exponentielle

I. Caractérisations de la fonction exponentielle.

1, Définitions.

Déf :

Il existe une unique fonction dérivable sur R qui est égale à sa dérivée et qui prend la valeur 1 en 0 : cette fonction est notée **exp** et vérifie : pour tout x∈R, exp'(x)=exp(x) et exp(0)=1.

Rem : La méthode d'Euler permet d'approcher la courbe représentative de la fonction exp. (séance Excel…)

L'existence de cette fonction est admise. Avant d'en démontrer l'unicité, prouvons qu'elle vérifie également les propriétés suivantes :

Prop : Pour tout x∈R, $\exp(x)$>0 et $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$

Démonstration de la propriété :

Soit $g(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$.
Exp(-x)=vou(x) avec de u(x)=exp(x) et v(x)=-x : comme u et v sont dérivable sur R, exp(-x) l'est également.
Ainsi, g est dérivable sur R comme produit de fonctions dérivables sur R.

$g'(x)=\exp(x)\times\exp(-x)+(-\exp(-x))\times\exp(x)=\exp(x)\times\frac{1}{\exp(x)}-\frac{1}{\exp(x)}\times\exp(x)=0$: g est donc constante sur R.

Or g(0)=exp(0)exp(-0)=exp(0)exp(0)=1.

Donc, pour tout x∈R, g(x)=1. D'où, pour tout x∈R : $\begin{cases}\exp(x)\neq 0\\ \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}\end{cases}$

Ainsi exp(x) est une fonction continue sur R telle que exp(0)=1. Si il existe a∈R tel que exp(a)<0 , le théorème des valeurs intermédiaire conclurait que exp(x) s'annule quelque part entre a et 0.
Donc, pour tout x∈R, exp(x)>0.

CQFD

Démontrons maintenant l'unicité de la fonction exp.

Soit f une fonction dérivable sur R telle que, pour tout x∈R : $\begin{cases} f'(x)=f(x) \\ f(0)=1 \end{cases}$.

Soit $g(x)=\frac{f(x)}{\exp(x)}$. Comme, pour tout x∈R, exp(x)≠0 et que g est le quotient de deux fonctions dérivables sur R, on en déduit que g est dérivable sur R.

$$g'(x)=\frac{f'(x)\exp(x)-\exp(x)f(x)}{\exp(x)^2}=\frac{f(x)\exp(x)-\exp(x)f(x)}{\exp(x)^2}=0$$

Donc g est constante sur R.

Or g(0)=1. Donc, pour tout x∈R, g(x)=1 et f(x)=exp(x). CQFD

2. Solution de l'équation différentielle f'=kf.

Prop :

- Les fonctions f dérivables sur R qui vérifient l'équation différentielle f'=kf (c'est-à-dire que pour tout x∈R, f'(x)=kf(x)) où k∈R sont toutes de la forme f(x)=Aexp(kx) où A∈R.
- Pour tout réels a et k, il existe une et une seule fonction f dérivable sur R qui vérifient l'équation différentielle f'=kf et telle que f(0)=a : c'est la fonction f(x)=aexp(kx)

Dém :

- Commençons par l'existence de la solution.

Soit f(x)=Aexp(kx).
f(x)=Avou(x) avec u(x)=kx et v(x)=exp(x) : cette fonction est dérivable sur R.

f'(x)=Au'(x)v'ou(x)=Akexp(kx)=kAexp(kx)=kf(x) : f vérifie bien f'=kf.

- Démontrons que toute solution est de la forme f(x)=Aexp(kx).

Soit f une fonction telle que f'=kf.
Soit $g(x)=\frac{f(x)}{\exp(kx)}$: Comme, pour tout x∈R, exp(kx)≠0 et que g est le quotient de deux fonctions dérivables sur R, on en déduit que g est dérivable sur R.

$$g'(x)=\frac{f'(x)\exp(kx)-k\exp(kx)f(x)}{\exp(kx)^2}=\frac{kf(x)\exp(kx)-k\exp(x)f(x)}{\exp(kx)^2}=0$$

Donc g est constante sur R : pour tout x∈R, g(x)=A. D'où f(x)=Aexp(kx).

- Si en plus la solution de f'=kf doit vérifier f(0)=a,

Alors g(0)= $\frac{f(0)}{\exp(0)}=a$: notre constante A est fixée et vaut a soit g(0). CQFD

3, Caractérisation algébrique.

Prop :

les seules f fonctions dérivables sur R telle que pour tout réels x et y f(x+y)=f(x)f(y) sont du genre exp(kx) où k est un réel.

Dém ;

- Démontrons que f(x)=exp(kx) vérifie f(x+y)=f(x)f(y).

Soir f(x)=exp(kx) : f est une fonction dérivable sur R telle que f'(x)=kf(x).

Soit g(x)=f(x+y)-f(x)f(y).

g'(x)=(x+y)'f'(x+y)-f'(x)f(y)-f'(y)f(x)
=f'(x+y)-f'(x)f(y)
=kf(x+y)-k(x)f(y)
=kg(x)

Donc g est de la forme aexp(kx) où a=g(0).

De plus g(0)=f(y)-f(0)f(y)=f(y)-f(y)=0. On en déduit que A=0. donc g(x)=0 et f(x+y)=f(x)f(y).

- Démontrons que si f vérifie f(x+y)=f(x)f(y) alors f(x)=exp(kx).

Soit f une fonction dérivable sur R telle que tout réel x et y f(x+y)=f(x)f(y).

➔ f(0+x)=f(0)f(x) donc f(x)=f(0)f(x) donc f(0)=1

➔ f'(x+y)=(f(x)f(y))'=f'(x)f(y) ceci pour tout réel x et y.

Donc f'(y)=f'(0)f(y) pour tout réel y.

Donc f est de la forme aexp(kx) avec a=f(0)=1. CQFD

II. Propriétés et notations.

1. Propriétés

Prop :

Pour tout réels x et y,

- ➔ $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$
- ➔ $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- ➔ $\exp(nx)=\exp(x)^n$

Dém :

- La première propriété est l'application directe de la caractérisation algèbrique.
- Démontrons la seconde :

$$\exp(x-y)=\exp(x)\times\exp(-y)=\exp(x)\times\frac{1}{\exp(y)}=\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

- Reste la dernière :

Soit $g(x)=\exp(x)^n$: cette fonction est dérivable sur R et, pour tout x∈R :

$$g'(x)=n(\exp(x))'\exp(x)^{n-1}=n\exp(x)^n=ng(x)$$

Donc g est de la forme g(x)=g(0)exp(nx) avec g(0)=exp(0)^n=1. CQFD

2. Une nouvelle notation.

On remarque que pour tout n∈N, $\exp(n)=\exp(n\times 1)=\exp(1)^n$. En appelant e=exp(1), on obtient alors exp(n)=e^n. Nous verrons en TD que e≈2,718.
La fonction exponentielle partageant,de plus, les propriétés du 1. avec les puissances entières de x étudiées en classe de 4$^{\text{éme}}$, on adopte la notation ci-dessous :

Notation :

On notera désormais exp(x)=e^x. Les propriétés s'écrivent alors :

- ➔ $e^{x+y}=e^xe^y$
- ➔ $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$
- ➔ $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

III. Etude de la fonction exponentielle

1. Signes et sens de variation.

Nous savons que notre fonction est dérivable, et donc continue, sur R et que, pour tout x∈R, e'(x)=e(x).

De plus nous avons démontré que pour tout x∈R, e(x)>0 : la fonction exponentielle est donc strictement croissante sur R.

2. Approximation au voisinage de 0.

Prop :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e(x)-1}{x} = 1$: La meilleur approximation affine de e(x) en 0 est f(x)=x+1. la courbe de f est la droite tangente à la courbe de exp en 0. On écrit qu'au voisinage de 0 e(x)≈x+1.

Dém :

- $\frac{e(x)-1}{x} = \frac{e(x)-e(0)}{x-0}$.

Puisque la fonction exponentielle est dérivable sur R, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e(x)-e(x)}{x-0} = e'(0) = e(0) = 1$.

- La tangente à la courbe de exp en 0 a donc pour équation :

Y=e'(0)(x-0)+e(0)=x+1. CQFD

3. limites à l'infini.

Prop :

$\lim\limits_{x \to +\infty} e(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e(x) = 0$.

Dém :

- On veut démontrer que pour tout réel A∈R, il existe un réel a tel que si x>a alors e(x)>A. Soit A un réel quelconque.

Soit (U_n) la suite définie sur N par $U_n=e^n$

Comme e>1, la suite (Un) diverge vers +oo. Il existe un rang a tel que si n>a alors U_n>A.
Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur R, pour tout x>a, $e^x>e^a>A$.

- Démontrons maintenant que $\lim\limits_{x \to -\infty} e(x) = 0$

Posons X=-x.

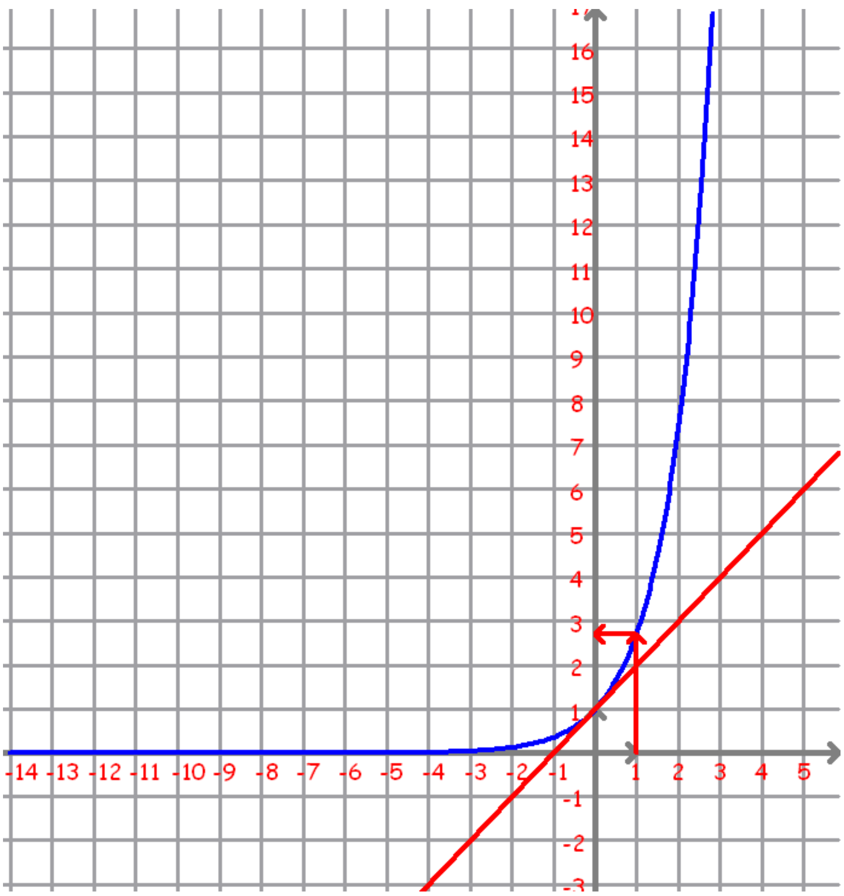
$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = \lim_{X \to +\infty} e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{e^{X}} = 0^{+}$$ CQFD

4. Courbe représentative.

Voici le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	-oo	+oo
Exp'(x)=e^x	+	
e^x	0^+ ↗	+oo

Voici la courbe représentative de de la fonction exponentielle avec la tangente en 0.



On remarque au passage que e≈2,7

5. Croissance comparée.

Prop :

Pour tout n€N,

- ➔ $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$ (0^+ si n est pair et 0^- sinon)
- ➔ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Rem :

Cela signifie que la fonction exponentielle croit plus vite que toute puissance de x :

x	e^x	x^2	x^3	x^4
1	2,71828183	1	1	1
2	7,3890561	4	8	16
3	20,0855369	9	27	81
4	54,59815	16	64	256
5	148,413159	25	125	625
6	403,428793	36	216	1296
7	1096,63316	49	343	2401
8	2980,95799	64	512	4096
9	8103,08393	81	729	6561
10	22026,4658	100	1000	10000

Dém :

- Tout d'abord, montrons que $e^x>x$ pour tout x€[0 ;+oo[

Soit $f(x)=e^x-x$: cette fonction est dérivable sur R et $f'(x)=e^x-1$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur R et que $e^0=1$, on en déduit que f'(x) est strictement positif sur]0 ;+oo[et donc que f est strictement croissante sur]0 ;+oo[.

Puisque f(0)=1, f est strictement positif sur [0 ;+oo[.

- Démontrons que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

En reprenant l'inégalité précédente, on peut affirmer que pour tout x€[0 ;+oo[et n€N, on a :

$$e^{\frac{x}{n+1}} > \frac{x}{n+1}$$

Il en découle :

$\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} > \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$ car chaque membre est positif.

D'où $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ et donc $\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)^{n+1}}$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{(n+1)^{n+1}} = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

- Démontrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

En reprenant la limite précédente, on a :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x(-x)^n} = +\infty$.

Ainsi, si n est paire, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(-x)^n = 0^+$ sinon $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x(-x)^n = 0^-$ CQFD

6. Equation du genre $e^x=e^y$

Prop :

Pour tout x∈R et y∈R, $e^x=e^y$ équivaut à x=y.

Dém :

Soit x∈R et y∈R tels que $e^x=e^y$.

Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur R,

- ➔ si x<y alors $e^x<e^y$.
- ➔ si x>y alors $e^x>e^y$.

Ainsi la seule possibilité pour avoir $e^x=e^y$ est que x=y. CQFD3

Ex :

$e^{2x+3} = e^{x^2}$

Equivaut à $2x+3=x^2$

C'est-à-dire $x^2-2x+3=0$ .....

IV. Equation différentielle du type y'=ay+b.

Dans toute la suite a et b sont deux réels avec a non nul

1. 1. Qu'est-ce ?

On cherche à déterminer toutes les fonctions dérivables sur R telles que pour tout x∈R f'(x)=af(x)+b.

Généralement on utilise pour ce genre d'équation où l'inconnue est une fonction une autre notation : on pose y la fonction et y' sa dérivée. On cherche alors à résoudre sur R l'équation différentielle y'=ay+b.

En Sc. Physique on notera plutôt y'= $\frac{dy}{dx}$ car la fonction y peut dépendre de plusieurs variables et on ne dérive que par rapport à l'une d'elle qu'il faut préciser.

2. 2. Forme des solutions.

Prop :

Soit (E) l'équation différentielle y'=ay+b.

- Les solutions de (E) sur R sont les fonctions de la forme $f(x) = \frac{-b}{a} + Ke^{ax}$ où K est une constante réelle.
- $x \mapsto \frac{-b}{a}$ est l'unique fonction constante solution de (E) sur R.
- Pour tout couple (x_0 ;y_0) de réels, (E) admet une unique solution f telle que f(x_0)=y_0.

Dém :

- Si y est constante alors y'=0.

(E) devient 0=ay+b d'où $y = \frac{-b}{a}$

- Soit g et h deux fonctions dérivables sur R avec pour tout x∈R, $h(x) = \frac{b}{a} + g(x)$ et donc $g(x) = h(x) - \frac{b}{a}$.

Pour tout x∈R,

$g'(x) = h'(x)$ et $ag(x) + b = a(h(x) - \frac{b}{a}) + b = ah(x)$

Ainsi g est solution de (E) si et seulement si h'=ah ce qui et vrai si et seulement si h est de la forme h(x)= Ke^{ax} pour tout x∈R (cf I.2.).

On en déduit alors que g est solution de (E) si et seulement si elle s'écrit pour tout x∈R sous la forme $g(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

- g(x_0)=y_0 équivaut à $Ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$ c'est-à-dire à $K = \frac{y_0 + \frac{b}{a}}{e^{ax_0}} = (y_0 + \frac{b}{a})e^{-ax_0}$

K est alors fixé et il y a une unique solution à (E) sur R qui est $f(x) = (y_0 + \frac{b}{a})e^{-ax_0} \quad e^{ax} - \frac{b}{a}$

C'est-à-dire $f(x) = (y_0 + \frac{b}{a})e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$

CQFD

Ex :

Résoudre sur R 3y'-2y=4

- Cette équation s'écrit également $y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$
- Les solutions sont toutes de la forme $f(x) = Ke^{\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = Ke^{\frac{2}{3}x} - \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = Ke^{\frac{2}{3}x} - 2$
- Si la courbe de f passe par A(3 ;-1) alors f(3)=-1

D'où $Ke^{\frac{2}{3}\times 3} - 2 = -1$ d'où $K = e^{-2}$ et $f(x) = e^{-2+\frac{2}{3}x} - 2$.