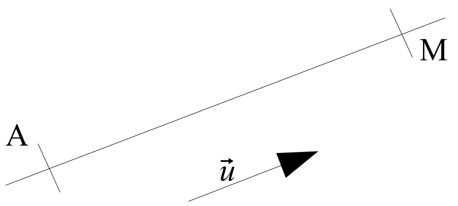
Droites et plans.

I. droites de l'espace.

1. Caractérisation vectorielle et paramétrique.

Une droite de l'espace est caractérisée par un point A par lequel elle passe et un vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M appartient à cette droite si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\times\vec{u}$. .



Conséquence :

Dans un repère (O; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) de l'espace, une droite (d) passant par A($x_A;y_A;z_A$) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=x_A+t\times a\\y=y_A+t\times b\\z=z_A+t\times c\end{cases}$ avec $t\in R$.

Dém :

M(x;y;z) in (d) si et seulement si il existe $t\in R$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\times\vec{u}$. .

c'est à dire si et seulement si il existe $t\in R$ tel que $\begin{cases}x=x_A+t\times a\\y=y_A+t\times b\\z=z_A+t\times c\end{cases}$.

Ex :

Soit (d) passant par A(1;2;3) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}$.

(d) admet pour représentation paramétrique $\begin{cases}x=1+t\times -2\\y=2+t\times 3\\z=3+t\times -4\end{cases}$ où $t\in R$.

Rem :

Le vecteur directeur et le point A pouvant être choisis d'une infinité de façon pour une même droite, elle admet une infinité de caractérisations paramétriques.

2. Caractérisation barycentrique d'un droite et d'un segment.

Prop :

Soit A et B deux points distincts de l'espace. La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de {(A;a);(B;b)} avec $a \in R, b \in R \text{ et } a+b \neq 0$.

Dém :

- $M \in (AB)$ si et seulement si il existe $t \in R$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \times \overrightarrow{AB}$

  C'est à dire si et seulement si il existe $t \in R$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \times (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$.

  C'est à dire si et seulement si il existe $t \in R$ tel que (1-t) $\overrightarrow{AM}$ +t $\overrightarrow{BM}$ = 0.

  C'est à dire si et seulement si il existe $t \in R$ tel que M barycentre de {(A;1-t) ;(B;t)}.

- Soit $a \in R \text{ et } b \in R \text{ avec } a+b \neq 0$. Soit M barycentre de {(A;a);(B;b)}.

  Comme le barycentre de deux points est toujours alignés avec ces deux points, $M \in (AB)$.

Prop :

Soit A et B deux points distincts de l'espace. Le segment (AB) est l'ensemble des barycentres {(A;a);(B;b)} avec $a \in R^+, b \in R^+ \text{ et } a+b \neq 0$.

Dém :

- $M \in [AB]$ si et seulement si il existe $t \in [0;1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \times \overrightarrow{AB}$

  C'est à dire si et seulement si il existe $t \in R$ tel que $\overrightarrow{AM} = t \times (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$.

  C'est à dire si et seulement si il existe $t \in R$ tel que (1-t) $\overrightarrow{AM}$ + t $\overrightarrow{BM}$ = $\vec{0}$.

  C'est à dire si et seulement si il existe $t \in R$ tel que M barycentre de {(A;1-t) ;(B;t)}.

  Or ici, $t \in [0;1]$ donc $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$.

- Soit $a \in R^+ \text{ et } b \in R^+ \text{ avec } a+b \neq 0$. Soit M barycentre de {(A;a);(B;b)}.

  a $\overrightarrow{MA}$ +b $\overrightarrow{MB}$ = $\vec{0}$

  a $\overrightarrow{MA}$ + b $\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

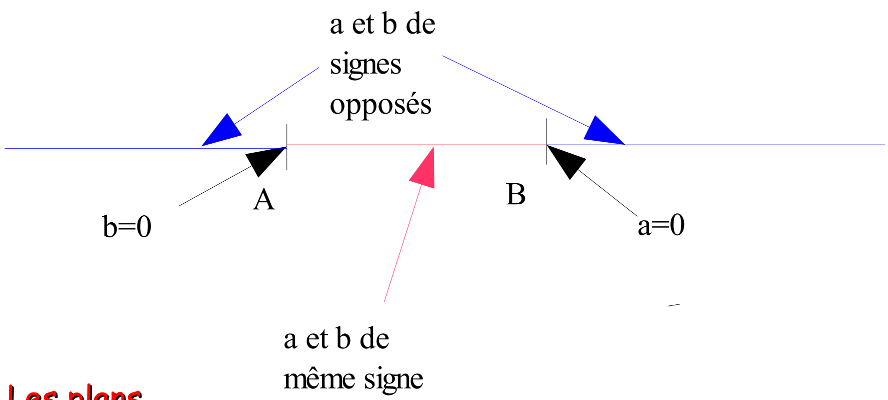
  $\overrightarrow{MA} = \dfrac{-b}{a+b} \overrightarrow{AB}$ car $a+b \neq 0$.

  $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$.

Comme $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $\dfrac{b}{a+b} \in [0;1]$ et donc $M \in [AB]$.

Rem :

Comme le barycentre ne change pas lorsqu'on multiplie tous les coefficients par le même réel non nul, la propriété ci-dessus reste vraie lorsque $a \leq 0$ et $b \leq 0$.



II. Les plans.

1. Caractérisations vectorielles et paramétriques.

Rappel (cf produit scalaire) :

Dans un repère (O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) de l'espace, un plan admet une équation cartésienne de la forme ax+by+cz+d=0, avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$. $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est alors un vecteur normal au plan.

Caractérisation vectorielle :

Soit (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$) un repère d'un plan (P). Un point M appartient à ce plan si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM}$ =t $\vec{u}$ +t' $\vec{v}$.

Conséquence :

Dans un repère (O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non colinéaires et $A(x_A; y_A; z_A)$. Le plan de repère (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$) admet alors pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + t \times a + t' \times a' \\ y = y_A + t \times b + t' \times b' \\ z = z_A + t \times c + t' \times c' \end{cases} \text{ où } t \in R \text{ et } t' \in R .$$

Dém :

Il suffit de prendre la caractérisation vectorielle du plan et de remplacer les vecteurs par leurs coordonnées.

Ex :

Soit (P) un plan d'équation cartésienne 2x-3y+2z-1=0.

On a : $\begin{cases} x=1+\frac{3}{2}y-z \\ y=0+1y+0z \\ z=0+0y+1z \end{cases}$ où $y\in R$ et $z\in R$

Donc (P) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+\frac{3}{2}t-t' \\ y=0+1t+0t' \\ z=0+0t+1t' \end{cases}$ où $t\in R$ et $t'\in R$.

le point A(1;0;0) appartient donc à (P) qui admet (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$) avec $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ comme repère.

2. Caractérisation barycentrique d'un plan.

Prop :

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace. Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres de {(A;a);(B;b);(C;c)} avec $a\in R, b\in R, c\in R$ et $a+b+c\neq 0$.

Dém :

C'est exactement le même principe que pour la caractérisation barycentrique d'une droite avec simplement un point supplémentaire dans les égalités vectorielles.

Prop :

Si les coefficients a,b et c sont de même signe, l'ensemble des barycentres de {(A;a);(B;b);(C;c)} est l'intérieur du triangle ABC.

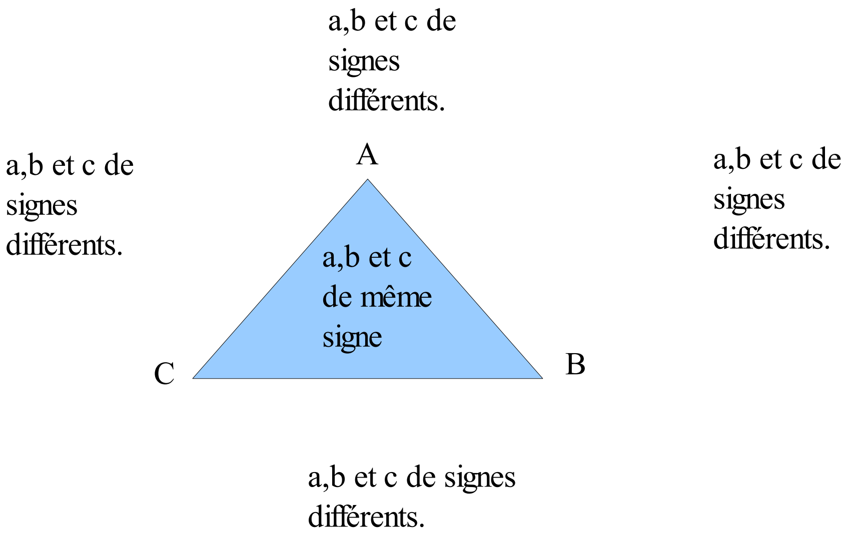
Dém :

Le point I, barycentre de {(A,a);(B,b)} , existe car a+b ne peut faire 0 lorsque a et b sont de même signe.

D'après le I.2, $I\in[AB]$.

Le barycentre G de {(A;a);(B;b);(C;c)} et donc celui de {(I;a+b); (C,c)} avec a+b et c de même signe. De la même façon, $G\in[IC]$ donc G est à l'intérieur du triangle ABC.

On admettra la réciproque...


a,b et c de signes différents.
A
a,b et c de signes différents.
a,b et c de signes différents.
a,b et c de même signe
C
B
a,b et c de signes différents.