Dénombrement et loi de probabilité.

I. Dénombrement.

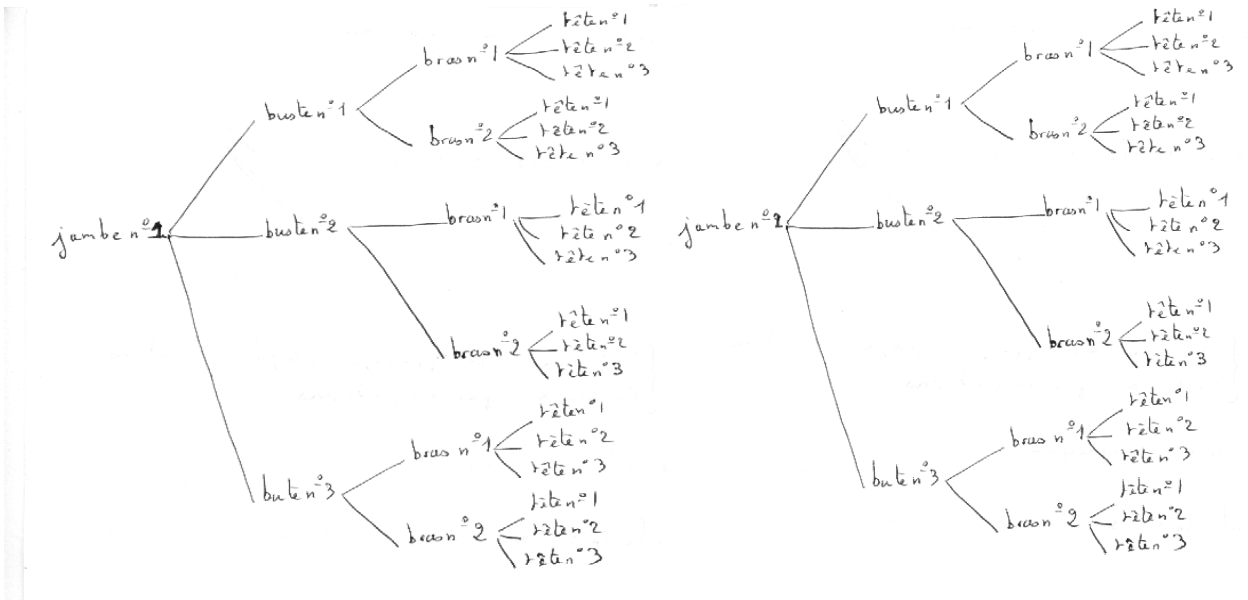
1. Qu'est-ce que dénombrer ?

En situation d'équiprobabilité, il est important de connaître le nombre totale de résultats possibles d'une expérience donnée. Aussi on compte ces résultats : on dit qu'on les dénombres.

Ex : principe multiplicatif.

Dans un puzzle pour enfant, un personnage se compose de 4 pièces : les jambes, le buste, les bras et la tête. Il y a 2 paires de jambes différentes, 3 bustes, 2 paires de bras et 3 têtes. Un seul personnage complet est un clown. Quelle chance a-t-on de l'obtenir en montant le puzzle au hasard ?

Nous sommes dans un situation d'équiprobabilité. Dénombrons le nombre total de personnages que l'on peut créer :



Il y a donc $2 \times 3 \times 2 \times 3$ possibilités soit 36 personnages différents dont 1 seul est le clown. La probabilité d'obtenir ce clown est donc $\frac{1}{36}$.

2. Factorielle d'un entier naturel.

Déf :

Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle de n le réel noté $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times 2 \times 1$.

Par convention , on décide que 0!=1.

Ex :

$4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$

$5!=5 \times 4 \times 3 \times 2 =120$

Prop :

Soit $a_1 ; a_2 ; ... ; a_n$ .L'ordre des éléments étant pris en compte. En permutant les places de deux éléments, on modifie cette liste. Par exemple, $a_n , a_2 ; ... ; a_1$ est une autre liste possible ou on a permuter a_n et a_1

Le nombre de listes différentes que l'on peut obtenir par permutation est n!

Ex :

5 chevaux sont au départ d'une course. Combien y-a-t-il d'arrivées possibles ?

Il s'agit de permuter les ordre d'arrivé des chevaux : il y en a donc 5!=120.

3. Combinaisons.

a. Définition.

Déf :

Soit A={ $x_1 ; x_2 ; ... ; x_n$ } une ensemble de n éléments. On appelle combinaison de p($p \leqslant n$) éléments de A, un sous ensemble de A contenant p éléments.

Ex :

A={bleu; rouge; noir;vert}

E={bleu;rouge} est un combinaison de 2 éléments de A.

On remarque que L'ordre des éléments n'a pas d'importance.

Prop :

Le nombre de combinaisons de p élément de A est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$.

Ex :

Au loto, on choisit 7 nombres parmi 49. Il y a donc $\binom{49}{7}$ combinaisons possibles soit $\frac{49!}{7!(49-7)!} = 85900584$ combinaisons possibles.

Une personne qui joue une grille a donc une probabilité de gagner de $\frac{1}{85900584}$.

b. Formule et triangle de Pascal.

Formule de Pascal :

Soit n un entier naturel non nul.

- Si $0 \leq p \leq n$ alors $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
- Si $0 \leq p \leq n-1$ alors $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Dém :

Il suffit de poser les calculs et de simplifier.

Triangle de Pascal :

En utilisant la formule $\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$, en remarquant que $\binom{n}{n}=1$ et $\binom{n}{0}=1$, on peut dresser un tableau, appelé triangle de Pascal, qui donne la valeur de $\binom{n}{p}$ selon celles de n et p.

	p=0	**p=1**	**p=2**	**p=3**	**p=4**	**p=5**
n=0	**1**					
n=1	**1**	**1**				
n=2	**1**	**2**	**1**			
n=3	**1**	**3**	**3**	**1**		
n=4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**	
n=5	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Rem :

La formule $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$ traduit la symétrie de chaque ligne du triangle.

c. Formule du binôme.

Prop :

Soit a et b deux réels (ou complexes) et n un entier naturel non nul.

On a la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

Dem :

$(a+b)^n=(a+b)(a+b)...(a+b)$: ce produit est composé de n facteurs (a+b).

Si on développe ces n facteurs, on fait apparaître les termes $a^n, a^{n-1}\times b, a^{n-2}\times b^{2,} ..., a^1\times b^{n-1} et\, a\times b^n$, c'est à dire des termes de la forme $a^{n-k}\times b^k$ où k varie de 0 à n.

Le terme $a^{n-k}\times b^k$ est obtenu en prenant k fois le terme b parmi les n facteurs et donc, automatiquement, a dans les n-k autres facteurs : il y a donc $\binom{n}{k}$ termes $a^{n-k}\times b^k$.

$(a+b)^n$ étant la somme de ces termes pour k allant de 0 à n, on obtient $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

CQFD

Ex :

Pour les valeurs des combinaisons, on utilise le triangle de Pascal.

$$(a+b)^2=\sum_{k=0}^{k=2}\binom{2}{k}a^{n-k}b^k=\binom{2}{0}a^2\times b^0+\binom{2}{1}a^{2-1}b^1+\binom{2}{2}a^{2-2}b^2=a^2+2\mathrm{ab}+b^2$$

$$(a+b)^3=\sum_{k=0}^{k=3}\binom{3}{k}a^{3-k}b^k=\binom{3}{0}a^3\times b^0+\binom{3}{1}a^{3-1}b^2+\binom{3}{2}a^{3-2}b^2+\binom{3}{3}a^{3-3}b^3=a^3+3\mathrm{a}^2\times b+3\mathrm{a}\times b^2+b^3$$

II. Loi de Bernoulli et loi binomiale.

1. Loi de Bernoulli.

Déf :

On appelle loi de Bernoulli, notée B_a où $a\in[0,1]$, une loi définie sur un univers E formé de deux possibilités p_1 et p_2 telle que :

p_i	p_1	p_2
$P(p_i)$	a	1-a

Ex :

On joue à pile ou face avec une pièce truquée telle que face ait deux fois plus de chance que pile de sortir.

Si p(« face »)=a alors p(« pile »)=1-a.

On doit alors avoir : a=2(1-a). D'où 3a=2 et a= $\frac{2}{3}$.

Nous avons la loi de Bernoulli $B_{\frac{2}{3}}$ suivante :

p_i	***face***	***pile***
$P(p_i)$	$\frac{2}{3}$	$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

2. Loi binomiale

Déf / prop:

Soit $a \in [0,1]$ et $n \in N$. On répète n fois l'expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{ p_1 ; p_2 \}$ suivant la loi B_a de Bernoulli ci dessous :

p_i	p_1	p_2
$P(p_i)$	a	1-a

Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de fois que le résultat p_1 est obtenu.

X suit la loi binomiale de paramètres n et a telle que pour tout $0 \leq k \leq n$, p(X=k)= $\binom{n}{k} a^k \times (1-a)^{n-k}$.

Dém :

Lorsque l'on obtient k fois le résultat p_1 , on obtient automatiquement n-k fois le résultats p_2 .

La probabilité d'obtenir p_1 k fois et p_2 n-k fois dans cet ordre est $a^k \times b^{n-k}$.

Or il y a $\binom{n}{k}$ combinaisons différentes pour obtenir p_1 k fois et p_2 n-k fois. En ajoutant leurs probabilités, on obtient le résultat.

Ex :

En reprenant la loi de Bernoulli de la pièce truquée du 1., on se demande quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois «face» en 5 lancés.

D'après la loi binomiale, cette probabilité est $\binom{5}{4}(\frac{2}{3})^4 \times (\frac{1}{3})^{5-4} = 5 \times \frac{16}{81} \times \frac{1}{3} = \frac{80}{243}$

Prop (admise) :

Pour une loi binomiale de paramètres a i [0;1] et n in N, L'espérance et la variance de X sont $E(X) = n \times a$ et $V(X) = n \times a \times (1-a)$.

Ex :

En reprenant la loi binomiale de la pièce truquée du 1., «face» rapporte 1euro et «pile» fait perdre 1 euros.

Le gain moyen pour n partie sera $E(X) = 1 \times n \times \frac{2}{3}$

III.Loi continue.

1. Définition.

Soit I =[a;b] ou I=[a;+oo[un intervalle de R. On désigne par (c;d) un intervalle de I ouvert ou fermé. Soit f une fonction continue et positive sur I.

On définit une loi de probabilité P sur I de densité f telle que :

- Si I=[a;b] : P((c;d))= $\int_c^d f(x)dx$ et p(I)= $\int_a^b f(x)dx=1$.
- Si I=[a;+oo[: P((c;d))= $\int_c^d f(x)dx$, p(I)= $\lim_{x\to+oo}\int_a^x f(x)dx=1$ et P((c;+oo))=1- $\int_a^c f(x)dx$.

Conséquences :

(i) P{(c;c)}=0 pour tout $c\in R$.

(ii) Si J et J' sont deux intervalles de R telles que $J\cap J'=\emptyset$ et $J\cup J'=I$ alors P(J')=1-P(J).

(iii) Si J et J' sont deux intervalles disjoints de R alors $P(J\cup J')=P(J)+P(J')$

(iv) Si J et J' sont deux intervalles de R tels que $P(J)\neq 0$ alors $P_J(J')=\frac{P(J\cap J')}{P(J)}$

2. Loi uniforme.

Déf :

Il s'agit d'une loi continue P sur I=[0;1] de densité f où f(x)=1 pour tout $x\in[0;1]$. Dans ce cas, pour tout intervalle (c;d), P((c;d))=d-c.

Ex :

On se sert de cette loi pour modéliser le choix d'un réel au hasard dans [0;1] :

La probabilité qu'il appartienne à [0,2;0,6] est de 0,6-0,2=0,4.

3. Loi exponentielle.

Déf :

La loi exponentielle de paramètre $\lambda\in R^+$ est une loi continue P sur R^+ de densité $f(x)=\lambda\times e^{-\lambda\times x}$.

pour tout intervalle (c;d), P((c;d))= $\int_c^d \lambda\times e^{-\lambda\times x}dx=[-e^{-\lambda\times x}]_c^d=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$.

Rem :

On a bien $\lim_{x \to +oo} \int_0^x f(x)dx = 1$.

Ex :

La durée de vie X d'un appareil a été modélisée par la loi exponentielle de paramètres $\lambda = 0{,}0006$ sur [0;+oo[.

- La probabilité qu'un appareil ait une durée de vie de moins de 1000h est :

$$P(X \leq 1000) = P([0\,;1000]) = \int_0^{1000} 0{,}0006\ e^{-0{,}0006\,x}dx = [-e^{0{,}0006x}]\begin{matrix}1000\\0\end{matrix} = -e^{-0{,}6} + e^0 = 1 - e^{-0{,}6} \approx 0{,}45$$

- La probabilité qu'il dure plus de 500 heures est :

$$P(X \geq 500) = ¿\,1 - \int_0^{500} 0{,}0006\ e^{-0{,}0006x}dx = 1 - [-e^{0{,}0006x}]\begin{matrix}500\\0\end{matrix} = 1 - (-e^{-0{,}3} + e^0) = 1 + e^{-0{,}3} - 1 = e^{-0{,}3} \approx 0{,}74$$