Critère de convergence et recherche de limite d'une suite.

I. Suites et Fonctions.

1. Composition

Dans toute cette partie, l et a peuvent désigner des réels, $+\infty$ ou $-\infty$.

Prop :

Soit (V_n) une suite à valeurs dans I⊂ $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et (U_n) une suite telle que $U_n = f(V_n)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $\lim V_n = l$ et $\lim_{x \to l} f(x) = a$ alors $\lim U_n = a$.

Cas particuliers avec les même hypothèses :

- Si f est continue alors $\lim U_n = f(l)$.
- Si $U_n = f(n)$ et que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ alors $\lim U_n = a$.

Ex:

La suite définie par $U_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0 car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. Théorème du point fixe.

Prop :

Soit (U_n) une suite et f une fonction continue telles que $U_{n+1} = f(U_n)$.

Si (U_n) est convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$ alors l est solution de l'équation $l = f(l)$. l est appelé « point fixe » de f.

Dém :

Soit (V_n) la suite définie par $V_n = f(U_n)$.

Si $\lim U_n = l$ alors, f étant continue, $\lim V_n = f(l)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_{n+1}$.

Comme $\lim U_{n+1} = \lim U_n = l$, on obtient: $l = f(l)$.

II. Suites et encadrements.

1. Convergence et monotonie.

Th (admis) :

- Si (U_n) est croissante est majorée alors (U_n) converge.
- Si (U_n) est décroissante et minorée alors (U_n) converge.

Attention :

Le majorant (resp. le minorant) n'est pas la limite de la suite la pluspart du temps. En effet, si un réel A est majorant (resp. minorant) de (U_n) alors tous les réels supérieurs (resp inférieurs) à A le sont aussi.

2. Théorème des gendarmes.

Th :

Soit $(U_n),(V_n) et (W_n)$ trois suites telles que pour tout $n \geq n_0$ (où $n \in \mathbb{N} et n_0 \in \mathbb{N}$), on a $V_n \leq U_n \leq W_n$.

- Si (V_n) et (W_n) convergent toutes les deux vers un même réel l alors (U_n) converge également vers l.
- Si (V_n) diverge vers $+\infty$ alors (U_n) diverge vers $+\infty$.
- Si (W_n) diverge vers $-\infty$ alors (U_n) diverge vers $-\infty$.

Dém :

Pour tout réel positif ε :

- (V_n) est convergente vers le réel l donc il existe un rang n_0 tel que si $n > n_0$ alors $V_n \in]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$
- (W_n) est convergente vers le réel l donc il existe un rang n_1 tel que si $n > n_1$ alors $W_n \in]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$
- Soit n_2 un entier supérieur à n_0 et n_1. Pour tout $n > n_2$, $V_n \in]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$ et $W_n \in]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$ donc par conséquent $U_n \in]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$.

Ainsi (U_n) converge également vers l.

Ex :

Soit (U_n) définie par $U_n = \frac{\cos(n)}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $\frac{-1}{n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$.

Comme $\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{-1}{n} = 0$, (U_n) converger vers 0 d'après le Théorème des gendarmes.

III. Suites adjacentes.

1. Définition.

Déf :

Deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si les conditions ci-dessous sont vérifiées :

- (U_n) est croissante.
- (V_n) est décroissante.
- $\lim U_n - V_n = 0.$

Prop :

Si (U_n) et (V_n) sont adjacentes, avec (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.

Dém :

On procède par l'absurde :

Supposons qu'il existe un rang $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_k > V_k$.

Les sens de variation des suites font que pour tout n>k, $U_n - V_n > U_k - V_k$.

Cela est en contradiction avec l'hypothèse $\lim U_n - V_n = 0$ et par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$.

2. Convergence et limite.

Prop :

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Dém :

Soit (U_n) croissante et (V_n) décroissante telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < V_n$ et $\lim U_n - V_n = 0.$

(U_n) et croissante et majorée donc converge vers un réel $l_1.$

(V_n) et croissante et majorée donc converge vers un réel $l_2.$

Lim $(U_n - V_n)$ =0 donc $\lim U_n - \lim V_n = 0$ donc $l_1 = l_2.$ et (V_n) et (U_n) convergent bien vers la même limite l.